第十三章

达朗贝尔原理(动静法)

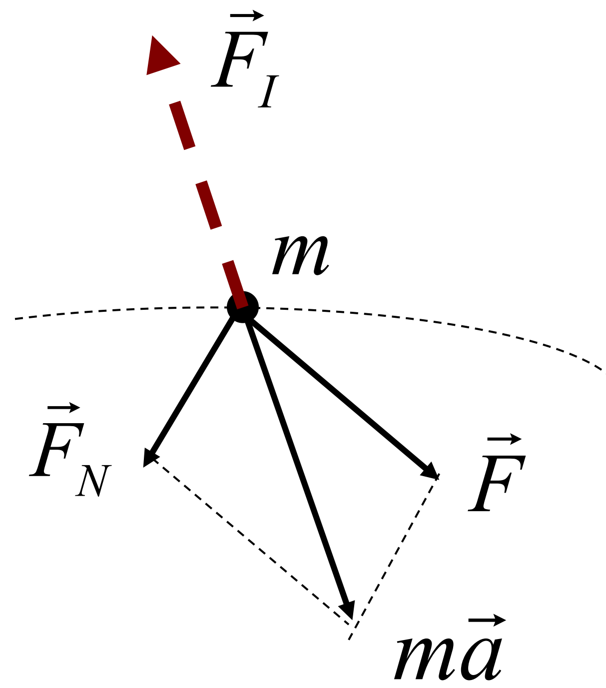
§ 13-1　惯性力·质点的达朗贝尔原理

$$m\vec{a}=\vec{F}+\vec{F}_{\mathrm{N}}$$

$$\vec{F}+\vec{F}_{\mathrm{N}}-m\vec{a}=0$$

令　$\vec{F}_{\mathrm{I}}=-m\vec{a}$ **惯性力**

有　$\boxed{\vec{F}+\vec{F}_{\mathrm{N}}+\vec{F}_{\mathrm{I}}=0}$



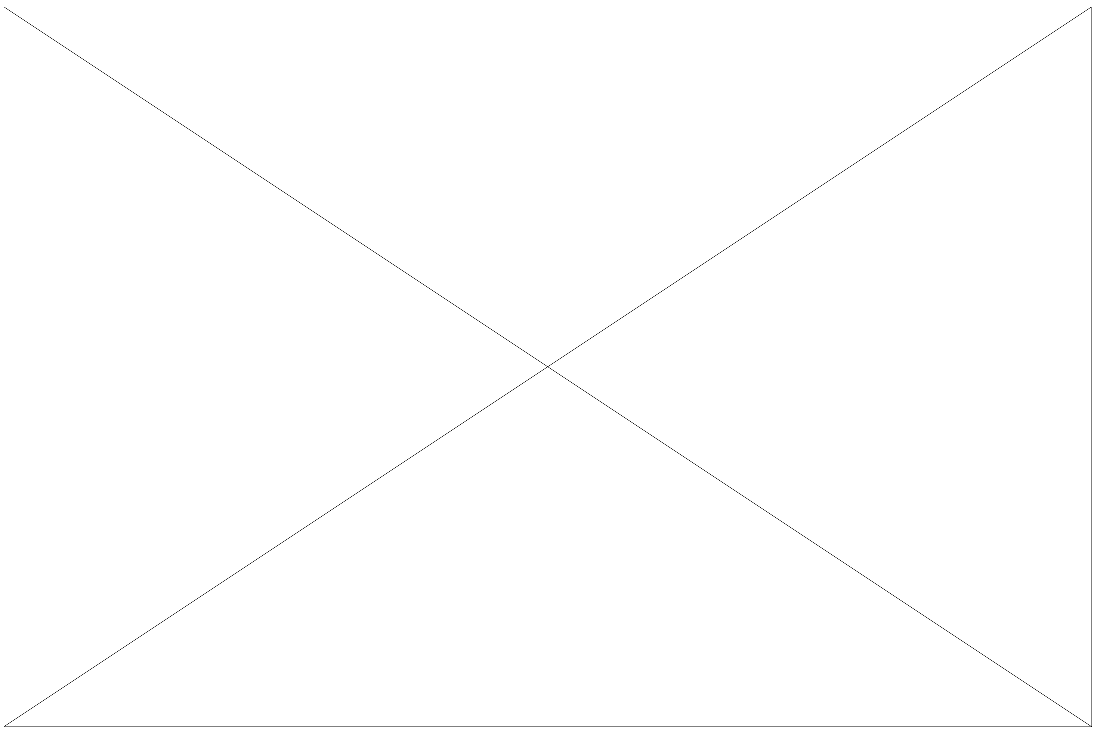
——质点的达朗贝尔原理

作用在质点的主动力、约束力和虚加的惯性力在形式上组成平衡力系.

例13-1

已知： $m = 0.1\text{kg}, l = 0.3\text{m}, \theta = 60^\circ$

求： $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{F}_\text{T}.$



解:

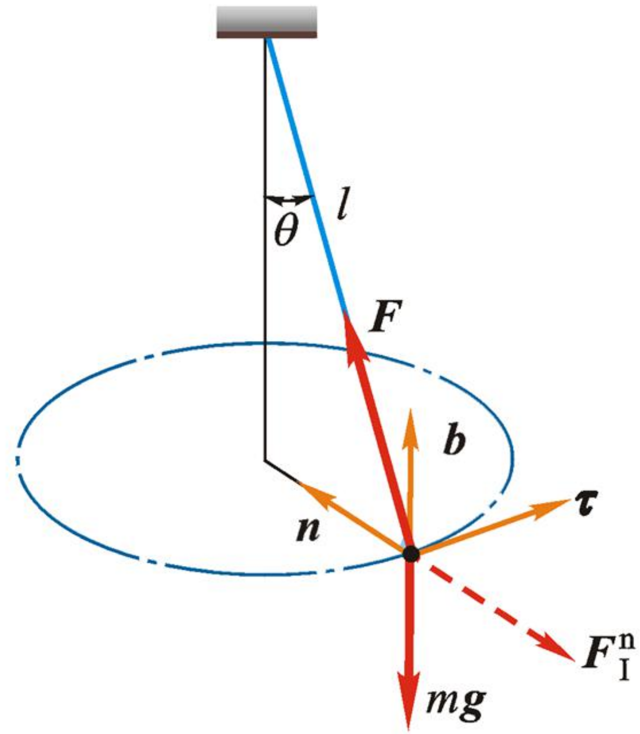
$$F_{\mathrm{I}} = ma_n = m\frac{v^2}{l\sin\theta}$$

$$m\vec{g} + \vec{F}_{\mathrm{T}} + \vec{F}_{\mathrm{I}} = 0$$

$$\sum F_b = 0, \quad F_{\mathrm{T}}\cos\theta - mg = 0$$

$$\sum F_n = 0, \quad F_{\mathrm{T}}\sin\theta - F_{\mathrm{I}} = 0$$

$$F_{\mathrm{T}} = \frac{mg}{\cos\theta} = 1.96\mathrm{N} \qquad v = \sqrt{\frac{F_{\mathrm{T}} l \sin^2\theta}{m}} = 2.1\mathrm{m/s}$$



应用静力学写平衡方程的方法求解动力学问题，这种方法称为动静法。

§ 13-2 质点系的达朗贝尔原理

$$\vec{F}_i + \vec{F}_{Ni} + \vec{F}_{Ii} = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

——质点系的达朗贝尔原理

质点系中每个质点上作用的主动力，约束力和惯性力在形式上组成平衡力系.

记 $\vec{F}_i^{(e)}$ 为作用于第 i 个质点上质点系外部物体的作用力.

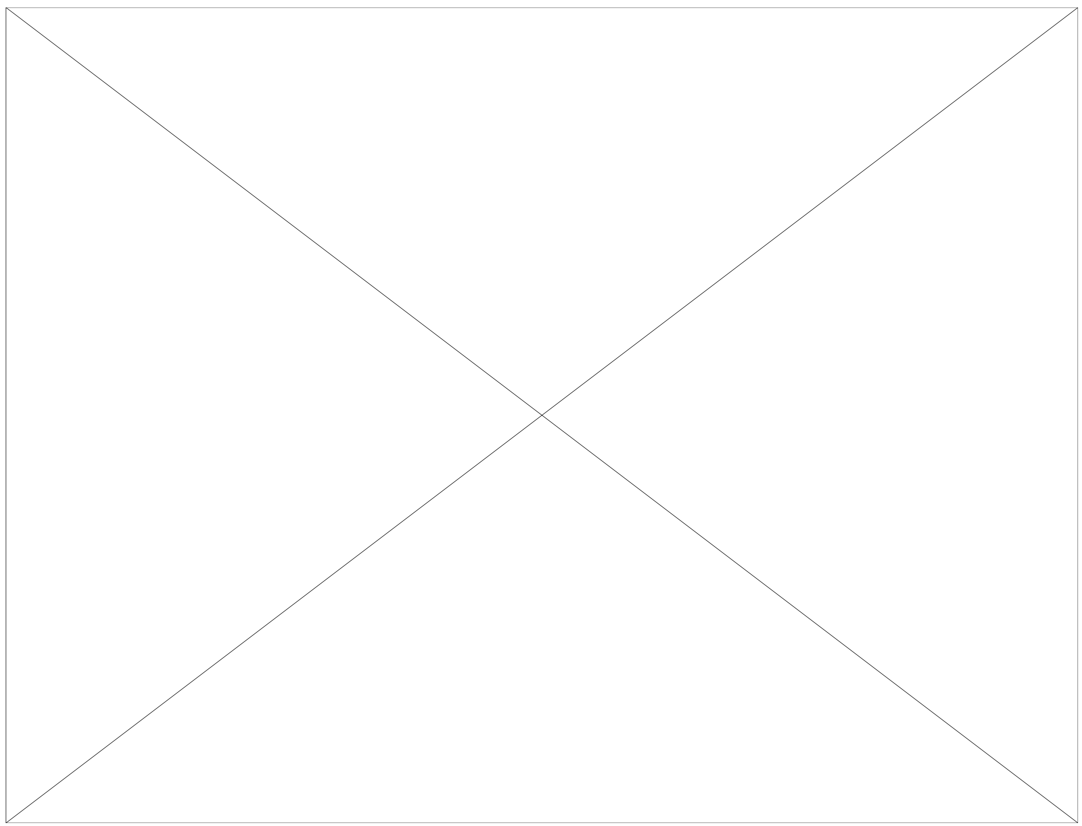
$\vec{F}_i^{(i)}$ 为作用于第 i 个质点上质点系内部的力.

$$\vec{F}_i + \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(i)} = 0 \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

例13-2

已知：如图所示，定滑轮的半径为r，质量为m均匀分布在轮缘上，绕水平轴O转动．垮过滑轮的无重绳的两端挂有质量为m_1和m_2的重物($m_1 > m_2$)，绳与轮间不打滑，轴承摩擦忽略不计。

求：重物的加速度．

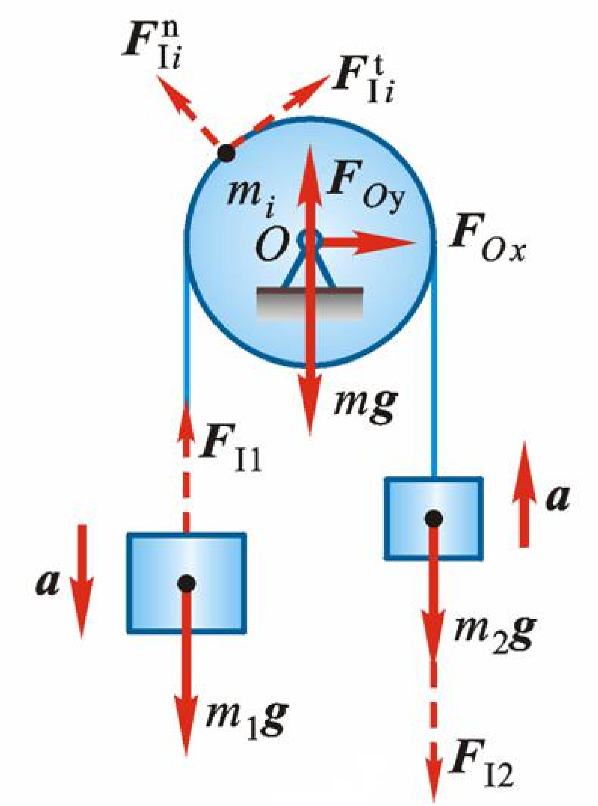


解:

$$F_{I1}=m_1a,\quad F_{I2}=m_2a$$

$$F_{Ii}^{t}=m_i r\alpha=m_i a\quad,\qquad F_{Ii}^{n}=m_i\frac{v^2}{r}$$

$$\sum M_O=0,\quad (m_1g-m_1a-m_2g-m_2a)r-\sum m_i ar=0$$



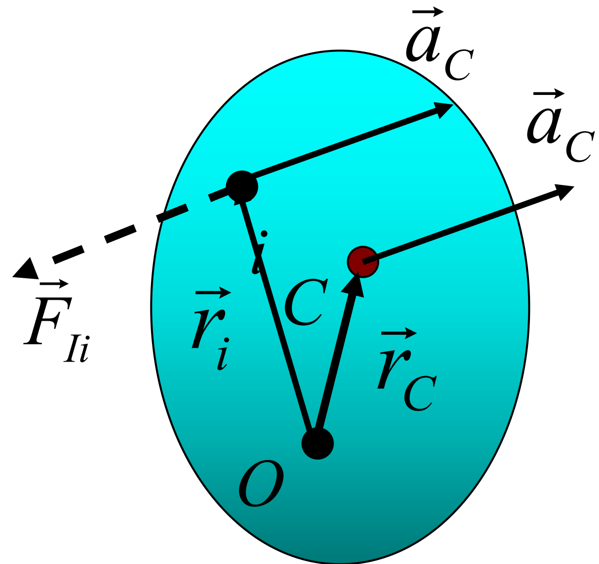
由 $\sum m_i ar=\left(\sum m_i\right)ar=mar$

解得 $a=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2+m}g$

§ 13-3 刚体惯性力系的简化

方法：向一点简化。

主矢： $\vec{F}_{IR} = -\sum \vec{F}_i^{(e)} = -\sum m_i \vec{a}_i = -m\vec{a}_C$



1. 刚体平移

惯性力系向点O简化.

$$\boxed{\vec{M}_{IO}} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{Ii} = \sum \vec{r}_i \times (-m_i \vec{a}_C) = -(\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{a}_C$$

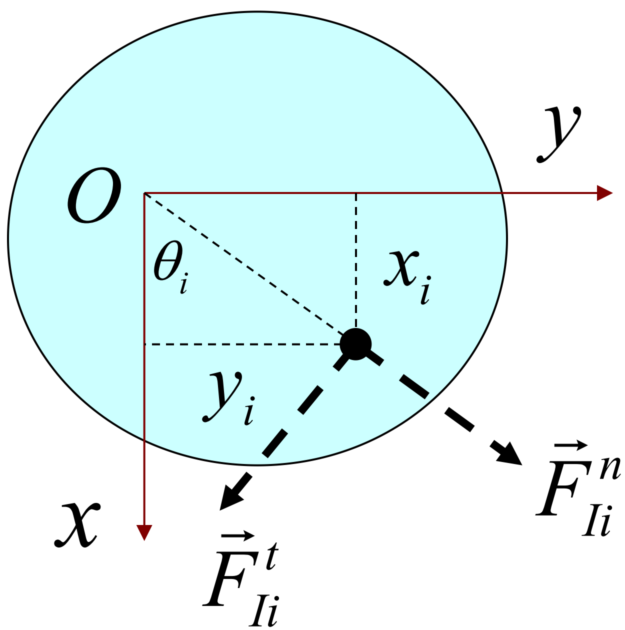
$$= \boxed{-m\vec{r}_C \times \vec{a}_C}$$

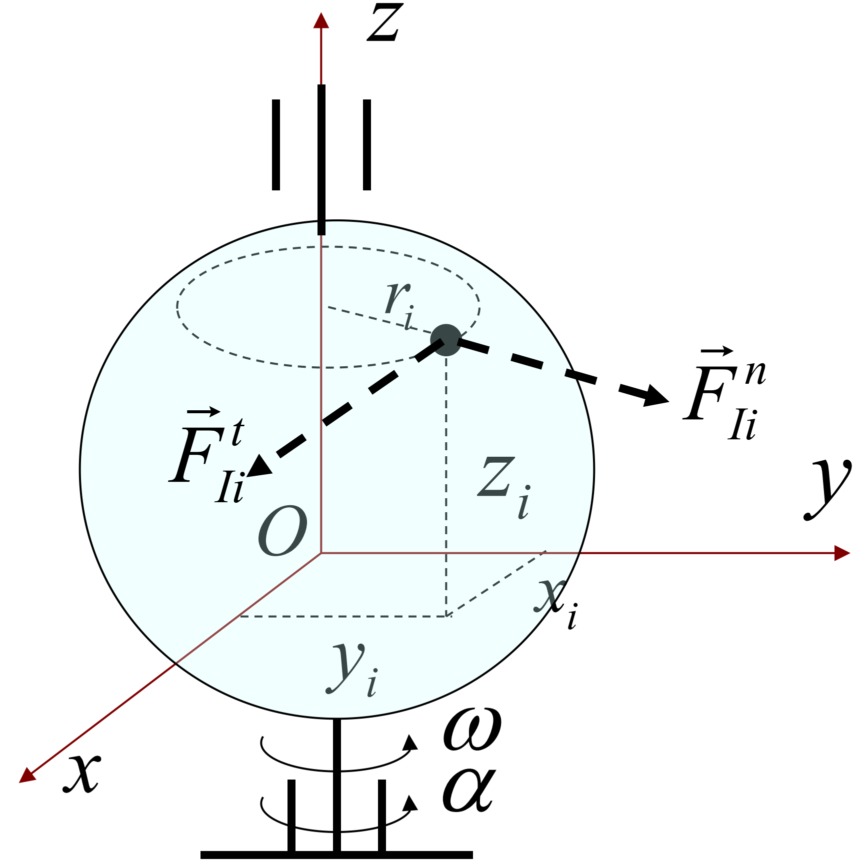
惯性力系向质心简化. $\vec{M}_{IC} = 0$

只简化为一个力 $\vec{F}_{IR} = -m\vec{a}_C$

平移刚体的惯性力系可以简化为通过质心的合力，其大小等于刚体的质量与加速度的乘积，合力的方向与加速度方向反向。

2. 刚体定轴转动





$$F_{\mathrm{I}i}^{t}=m_i a_i^{t}=m_i r_i\alpha \qquad F_{\mathrm{I}i}^{n}=m_i a_i^{n}=m_i r_i\omega^2$$

$$M_{Ix}=\sum M_x\left(\bar{F}_{Ii}\right)=\sum M_x\left(\bar{F}_{Ii}^{t}\right)+\sum M_x\left(\bar{F}_{Ii}^{n}\right)$$

$$=\sum m_i r_i\alpha\cos\theta_i z_i+\sum(-m_i r_i\omega^2\sin\theta_i z_i)$$

$$M_{\mathrm{I}x}=\sum m_i r_i \alpha \cos\theta_i z_i+\sum(-m_i r_i \omega^2 \sin\theta_i z_i)$$

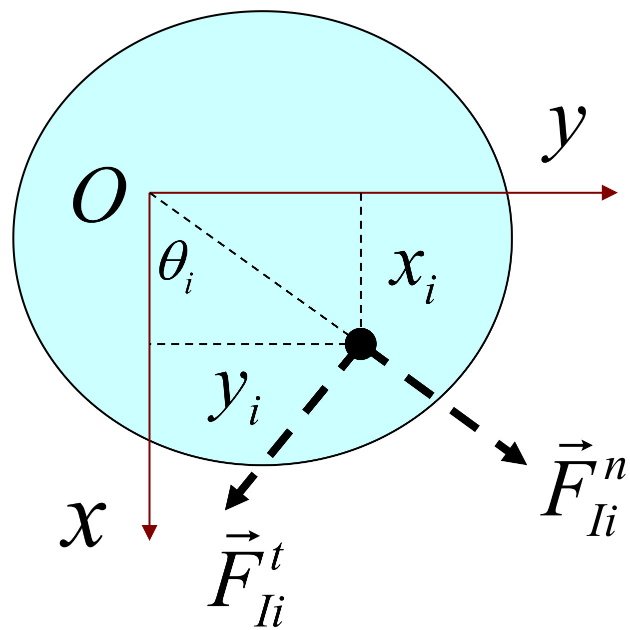
$$\cos\theta_i=\frac{x_i}{r_i},\quad \sin\theta_i=\frac{y_i}{r_i}$$

$$\Rightarrow\quad M_{\mathrm{I}x}=\alpha\sum m_i x_i z_i-\omega^2\sum m_i y_i z_i$$

$$J_{yz}=\sum m_i y_i z_i$$

$$J_{xz}=\sum m_i x_i z_i$$

——对于 z 轴的惯性积.

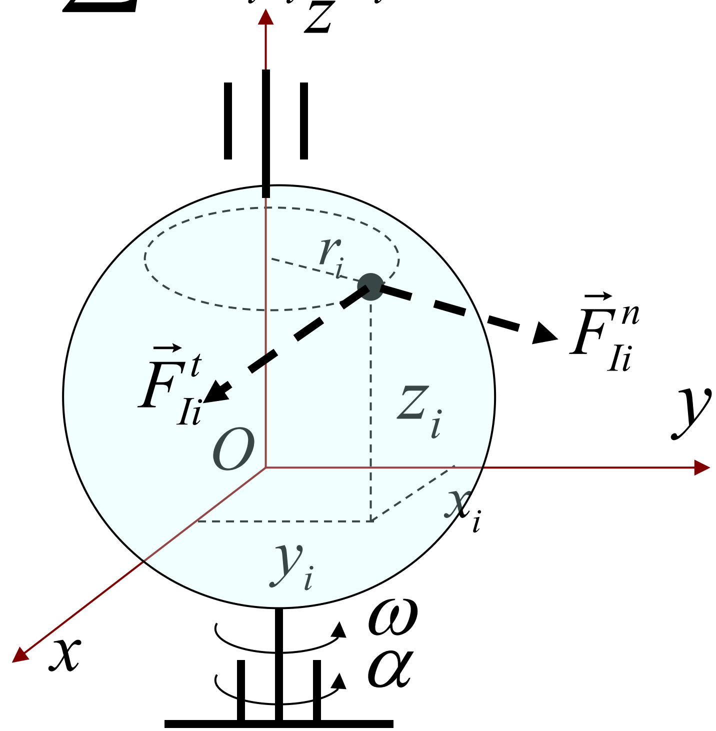


$$\Rightarrow\quad \boxed{M_{\mathrm{I}x}=J_{xz}\alpha-J_{yz}\omega^2}$$

同理 $\boxed{M_{\mathrm{I}y}=J_{yz}\alpha+J_{xz}\omega^2}$

$$M_{Iz}=\sum M_z\left(\bar{F}_{Ii}^t\right)+\sum M_z\left(\bar{F}_{Ii}^n\right)=\sum -m_i r_i \alpha r_i$$

$$=-\left(\sum m_i r_i^2\right)\alpha=-J_z\alpha$$

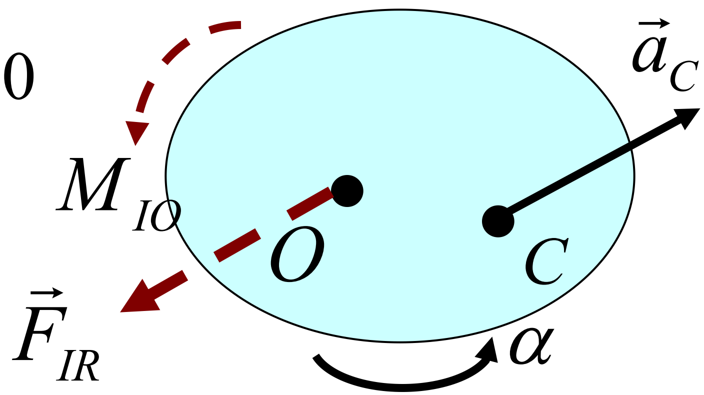


$$\vec{M}_{IO}=M_{Ix}\vec{i}+M_{Iy}\vec{j}+M_{iz}\vec{k}$$

如果刚体有质量对称面且该面与转动轴垂直，简化中心取此平面与转轴的交点，则

$$J_{xz}=\sum m_i x_i z_i=0,\quad J_{yz}=\sum m_i y_i z_i=0$$

$$\boxed{M_{IO}=M_{Iz}=-J_z\alpha}$$



思考：

1. 刚体匀速转动，转轴不通过质心。

$$\Downarrow$$

$$\vec{F}_{IR}=-m\vec{a}_C$$ 作用点在转轴上。

2. 转轴通过质心，但 $\alpha\neq 0$。

$$\Downarrow$$

$$M_{IO}=-J_O\alpha$$

3. 刚体作匀速转动，且转轴通过质心。

$$\Downarrow$$

$$\vec{F}_{IR}=0\,,\;M_{IO}=0$$

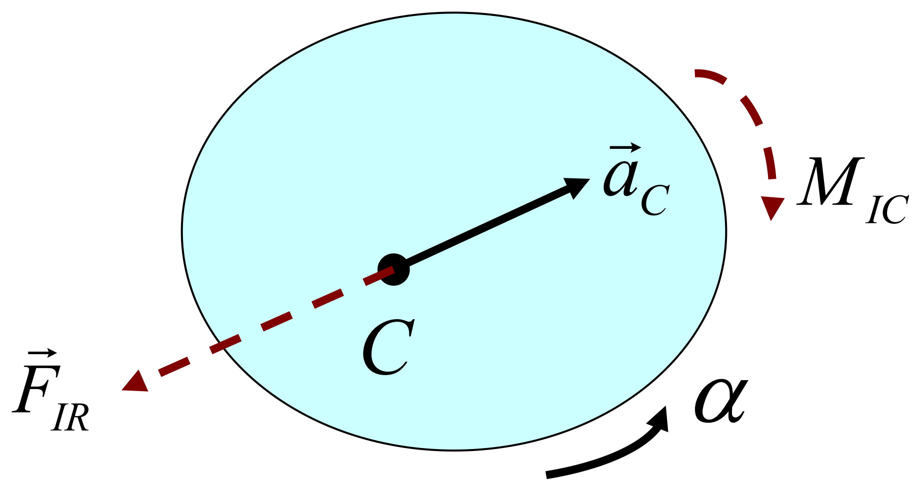
3.刚体作平面运动（平行于质量对称面）

向质心简化

随同质心平移运动 ⇒ $M_{IC}=0$

绕质心转动 ⇒ $M_{IC}=-J_C\alpha$

⇒ $\boxed{M_{IC}=-J_C\alpha}$



例13-3

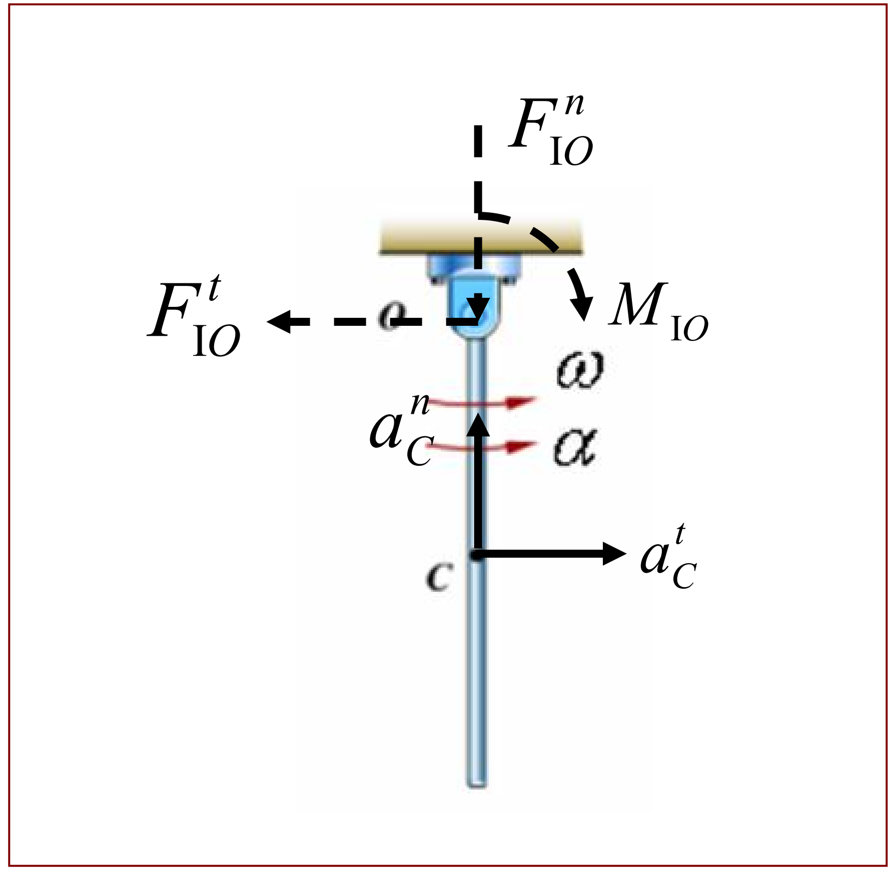
已知：如图所示均质杆的质量为m，长为l，绕定轴O转动的角速度为ω，角加速度为α。

求：惯性力系向点O简化的结果（方向在图上画出）。

解： $F_{IO}^{t}=m\dfrac{l}{2}\alpha$

$$F_{IO}^{n}=m\frac{l}{2}\omega^{2}$$

$$M_{IO}=\frac{1}{3}ml^{2}\alpha$$

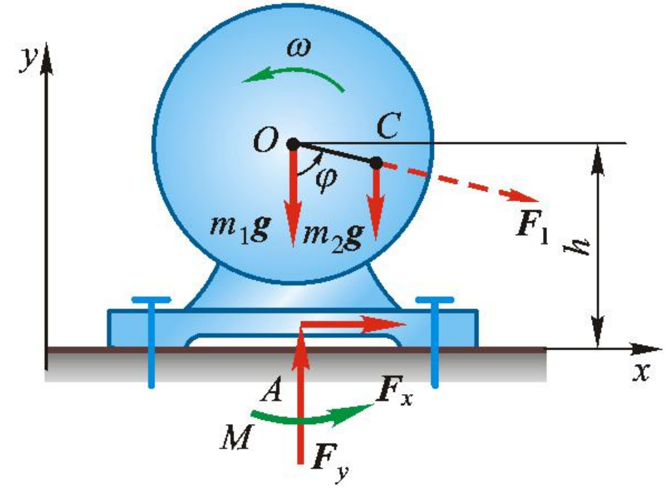


思考：向质心C简化结果如何？

例13-4

已知：如图所示，电动机定子及其外壳总质量为m_1，质心位于O处. 转子的质量为m_2，质心位于C处，偏心矩$OC=e$，图示平面为转子的质量对称面. 电动机用地角螺钉固定水平基础上，轴O与水平基础间的距离为h. 运动开始时，转子质心C位于最低位置，转子以匀角速度ω转动.

求：基础与地角螺钉给电动机总的约束力.



解： $F_I = me\omega^2$

$$\sum F_x = 0,\quad F_x + F_I \sin\varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0,\ F_y - (m_1 + m_2)g - F_I \cos\varphi = 0$$

$$\sum M_A = 0,\ M - m_2 ge\sin\varphi - F_I h\sin\varphi = 0$$

因 $\varphi = \omega t$，得

$$F_x = -m_2 e\omega^2 \sin\omega t$$

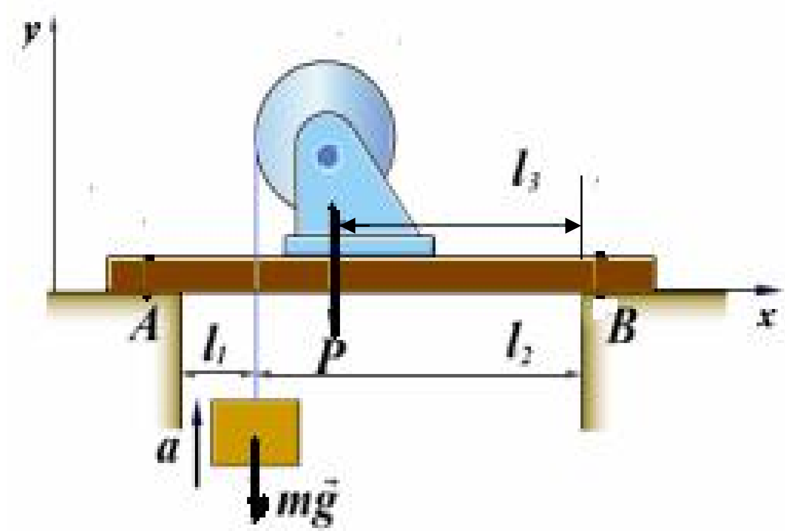
$$F_y = (m_1 + m_2)g + m_2 e\omega^2 \cos\omega t$$

$$M = m_2 ge\sin\omega t + m_2 e\omega^2 h\sin\omega t$$

例13-5

已知：如图所示，电动绞车安装在梁上，梁的两端搁在支座上，绞车与梁共重为P. 绞盘半径为R，与电机转子固结在一起，转动惯量为J，质心位于O 处. 绞车以加速度a提升质量为m的重物，其它尺寸如图.

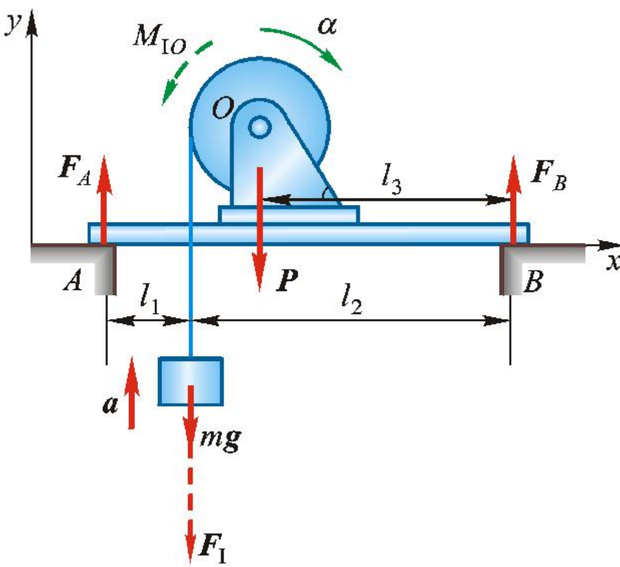
求：支座A，B受到的附加约束力.



解： $F_{\mathrm{I}} = ma \qquad M_{\mathrm{IO}} = J\alpha = J\dfrac{a}{R}$

$$\sum M_B = 0 \quad mgl_2 + F_I l_2 + Pl_3 + M_{IO} - F_A\left(l_1 + l_2\right) = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_A + F_B - mg - P - F_{\mathrm{I}} = 0$$



$$F_A = \boxed{\frac{mgl_2 + Pl_3}{l_1 + l_2}} + \frac{a}{l_1 + l_2}\left(ml_2 + \frac{J}{R}\right)$$

$$F_B = \boxed{\frac{mgl_1 + P\left(l_1 + l_2 - l_3\right)}{l_1 + l_2}} + \frac{a}{l_1 + l_2}\left(ml_1 - \frac{J}{R}\right)$$

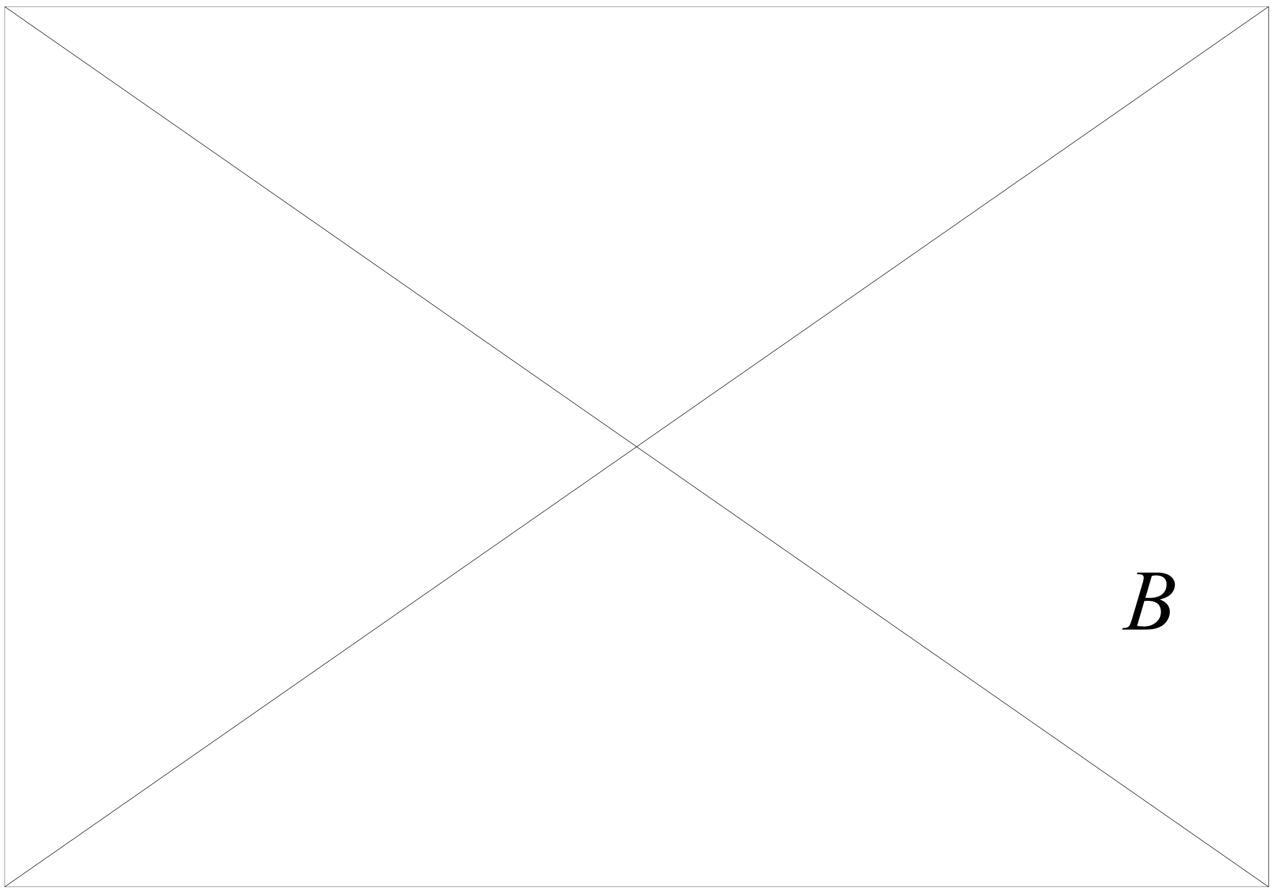
静约束力

附加约束力为 $\quad F_A' = \dfrac{a}{l_1 + l_2}\left(ml_2 + \dfrac{J}{R}\right) \quad F_B' = \dfrac{a}{l_1 + l_2}\left(ml_1 - \dfrac{J}{R}\right)$

例13-6

已知：均质圆盘 m_1, R, 纯滚动. 均质杆 $l=2R, m_2$.

求：F 多大, 能使杆 B 端刚好离开地面?纯滚动的条件?

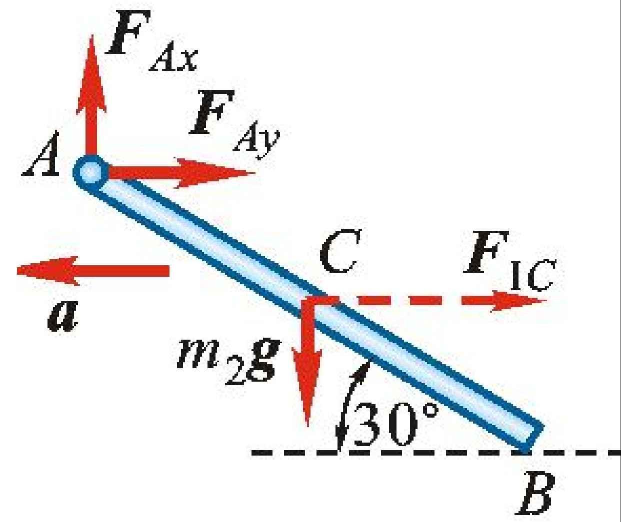


解： 刚好离开地面时，地面约束力为零.

研究 AB 杆

$$\sum M_A = 0 \quad m_2 a R \sin 30^\circ - m_2 g R \cos 30^\circ = 0$$

$$a = \sqrt{3} g$$



研究整体 $F_{IA} = m_1 a,\ M_{IA} = \dfrac{1}{2} m_1 R^2 \dfrac{a}{R}$

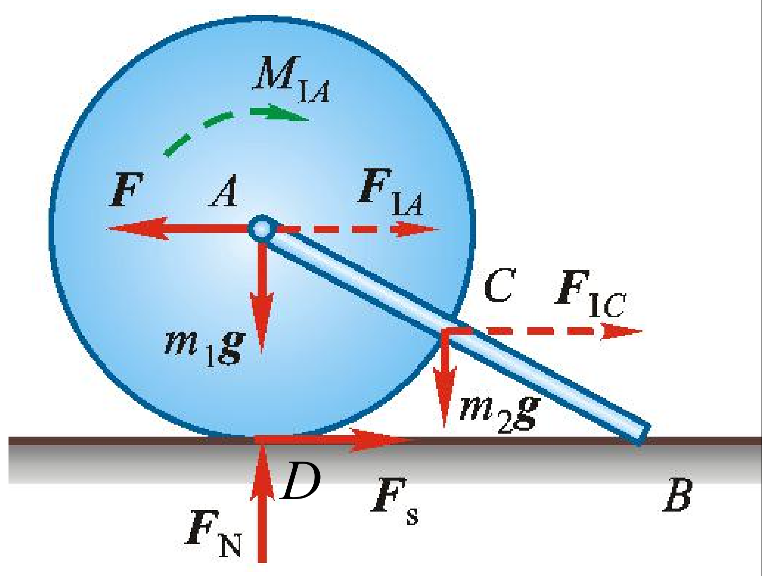
$$\sum M_D = 0 \quad FR - F_{IA} R - M_{IA} - F_{IC} R \sin 30^\circ - m_2 g R \cos 30^\circ = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad F - F_s - (m_1 + m_2) a = 0$$

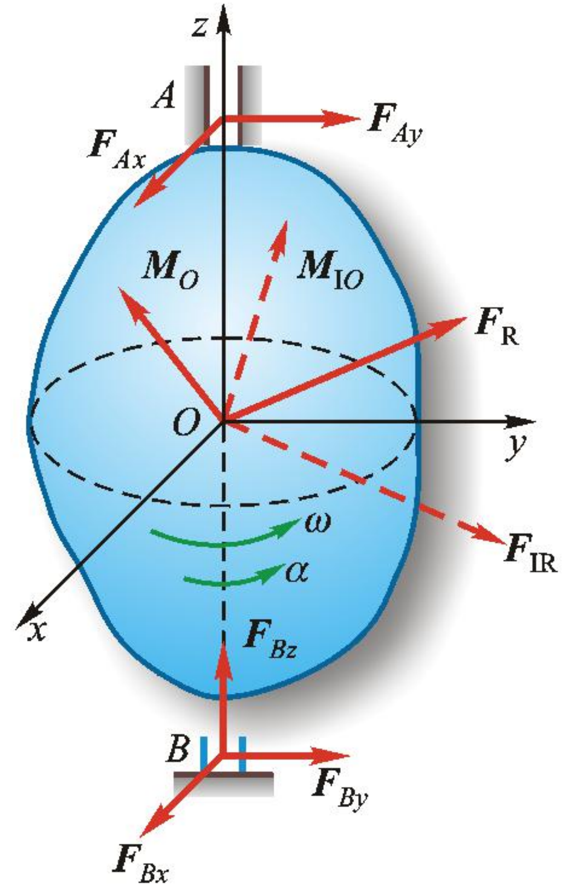
$$F = \left(\frac{3}{2} m_1 + m_2\right) \sqrt{3} g \quad F_s = \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g$$

$$F_s \le f_s F_N = f_s (m_1 + m_2) g$$

$$f_s \ge \frac{F_s}{F_N} = \frac{\sqrt{3} m_1}{2(m_1 + m_2)}$$



§ 13-4 绕定轴转动刚体的轴承动约束力



$$\sum F_x = 0 \quad F_{Ax} + F_{Bx} + F_{Rx} + F_{Ix} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{Ay} + F_{By} + F_{Ry} + F_{Iy} = 0$$

$$\sum F_z = 0 \quad F_{Bz} + F_{Rz} = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad F_{By} OB - F_{Ay} OA + M_x + M_{Ix} = 0$$

$$\sum M_y = 0 \quad F_{Ax} OA - F_{Bx} OB + M_y + M_{Iy} = 0$$

解得 $$F_{Ax}=-\frac{1}{AB}\left[\left(M_{y}+F_{Rx}OB\right)+\left(M_{Iy}+F_{Ix}OB\right)\right]$$

$$F_{Ay}=\frac{1}{AB}\left[\left(M_{x}-F_{Ry}OB\right)+\left(M_{Ix}-F_{Iy}OB\right)\right]$$

$$F_{Bx}=\frac{1}{AB}\left[\left(M_{y}-F_{Rx}OA\right)+\left(M_{Iy}-F_{Ix}OA\right)\right]$$

$$F_{By}=-\frac{1}{AB}\left[\left(M_{x}+F_{Ry}OA\right)+\left(M_{Ix}+F_{Iy}OA\right)\right]$$

$$F_{Bz}=-F_{Rz}$$

由 $\vec{F}_{IR}, \vec{M}_{IO}$ 引起的轴承约束力称**动约束力**

动约束力为零的条件为：$F_{Ix} = F_{Iy} = 0, \quad M_{Ix} = M_{Iy} = 0$

即：

$$F_{Ix} = -ma_{Cx} = 0$$

$$F_{Iy} = -ma_{Cy} = 0$$

$$M_{Ix} = J_{xz}\alpha - J_{yz}\omega^2 = 0$$

$$M_{Iy} = J_{yz}\alpha + J_{xz}\omega^2 = 0$$

必有

$$\vec{a}_C = 0$$

$$J_{xz} = J_{yz} = 0$$

称满足 $J_{xz} = J_{yz} = 0$ 的轴z为**惯性主轴**

通过质心的惯性主轴称为**中心惯性主轴**

因此，避免出现轴承动约束力的条件是：

刚体的转轴应是刚体的中心惯性主轴.

静平衡：刚体的转轴通过质心，刚体除重力外，没有受到其他主动力作用，则刚体在任意位置可以静止不动。

动平衡：当刚体的转轴通过质心且为惯性主轴时，刚体转动不出现动约束力。

例13-7

已知：如图所示，轮盘（连同轴）的质量 $m=20\text{kg}$，转轴$\boldsymbol{AB}$与轮盘的质量对称面垂直，但轮盘的质心$\boldsymbol{C}$不在转轴上，偏心距 $e=0.1\text{mm}$. 当轮盘以均转速 $n=12000\ \text{r}/\text{min}$ 转动.

求：轴承A, B的约束力

解： $a_n = e\omega^2 = \frac{0.1}{1000}\mathrm{m}\left(\frac{12000\pi}{30}\mathrm{s}^{-1}\right)^2 = 158\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

$$F_{\mathrm{I}} = ma_n = 3160\mathrm{N}$$

$$F_{NA} = F_{NB} = \frac{1}{2}\left(mg + F_{\mathrm{I}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(20\times 9.8 + 3160)\mathrm{N} = 1680\mathrm{N}$$