张量运算

这一节将介绍如何由给定的张量来构造新的张量。

从定义容易验证如果T是一个n阶张量（分量为$T_{ij\cdots k}$，当然，它是相对于某个给定的坐标系而言的）而a是一个标量（普通的数），那么，aT（其分量由$aT_{ij\cdots k}$定义）也是一个n阶张量；如果T和S是两个具有相同阶数（如n）的张量，那么$T+S$（分量由$T_{ij\cdots k}+S_{ij\cdots k}$定义）也是一个$n$阶张量。这两种运算分别称为张量的数乘及张量的和，对于矢量，数乘意味着矢量的伸长或缩短，而矢量和则满足通常的平行四边形法则。从这些性质我们马上可以推知位移、速度、加速度都是矢量，那么力呢？它当然也是一个矢量，但是这一点并非数学的结论，而是一个物理的假设（$\vec{F}=m\vec{a}$）！一个有趣的结论是任何一个 2 阶张量都可以由一个对称张量与一个反对称张量相加得到：

$$T_{ij}=\frac{T_{ij}+T_{ji}}{2}+\frac{T_{ij}-T_{ji}}{2}=\left(T_S\right)_{ij}+\left(T_A\right)_{ij} \tag{1}$$

顺便提一句，这两种运算实际上说明这样一个事实：任意两个n阶张量的任意线性组合仍是一个n阶张量，也就是说，所有n阶张量的集合构成了一个线性空间。

第三种运算称为张量的缩并，例如一个分量为T_{ijk}的 3 阶张量T，如果令$i=j$并对i求和，那么就得到了一个其第k个分量为$C_k=T_{iik}$的 1 阶张量（即矢量）。这是因为

$$C'_k=T'_{iik}=\lambda_{il}\lambda_{im}\lambda_{kn}T_{lmn}=\delta_{lm}\lambda_{kn}T_{lmn}=\lambda_{kn}T_{lln}=\lambda_{kn}C_n \tag{2}$$

当然，你也可以对其他的指标进行缩并，那么就得到了别的不同的矢量，例如T_{iji}和T_{ijj}。类似的，对于二阶张量，T_{ii}就是分量矩阵的迹，我们知道它在坐标变换（相似变换）下是不变的，也就是说它是一个标量。因此，将一个n阶张量的两个指标缩并就得到了一个$n-2$阶的张量。

最后一个张量运算称为张量积，对于任意两个张量T和S（阶数分别设为n

和 m），其张量积 $T\otimes S$ 是一个 $n+m$ 阶的张量，其分量由 $T_{i\cdots j}S_{k\cdots l}$ 来定义。譬如两个矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$，其张量积的分量就是 A_iB_j。

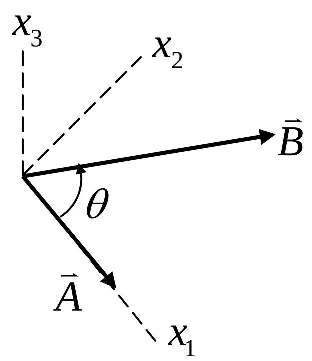
这四种运算——数乘、和、张量积和缩并——称为张量运算。在矢量代数中我们实际上已经接触过这里的所有运算，只是换了一个别的名称而已。例如，两个矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的标量积（或点积）我们知道是

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\equiv A_iB_i \tag{3}$$

它实际上就是 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的张量积对两个指标的缩并，当然它是一个标量。$\vec{A}$ 的长度则定义为

$$\left|\vec{A}\right|\equiv\sqrt{A_iA_i}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}=A \tag{4}$$

知道了 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的分量，我们就可以由公式(2)求得它们的标量积，不过我们有一个得到 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 的简单的几何方法：$\vec{A}\cdot\vec{B}$ 就等于 $\vec{A}$ 的长度和 $\vec{B}$ 的长度之积乘以它们之间夹角的余弦。为什么呢？假设我选一个 x_1 轴沿 $\vec{A}$ 方向的特殊的坐标系，在这种情况下，A_1 是 $\vec{A}$ 的唯一分量，它当然就是整个 $\vec{A}$ 的长度。此时方程就简化成 $\vec{A}\cdot\vec{B}=A_1B_1$，这就是 $\vec{A}$ 的长度乘 $\vec{B}$ 在 $\vec{A}$ 方向上的分量，也就是 $B\cos\theta$，因此，在这一个特殊的坐标系中，



$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta \tag{5}$$

然而，如果这个关系在一个坐标系中成立，那么它在所有坐标系中也应成立。因为 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 是一个标量，它的值与坐标系无关，这就是我们的论证。

标量积有什么用处呢？在物理学中有些什么场合需要用到它呢？是的，我们随时都要用到它。例如，动能是

$$\text{动能}=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} \tag{6}$$

因此，能量没有方向，它是一个标量；而动量有方向，它是一个矢量，等于质量乘以速度矢量。

当一个物体从一处被推到另一处时力所做的功是标量积的另一个例子：

$$功=\vec{F}\cdot d\vec{r} \tag{7}$$

有时讨论矢量在某一方向(比如说竖直方向，因为它就是重力方向)上的分量是很方便的。为此，在我们希望研究的方向上引入一个所谓单位矢量将是很有用的。所谓单位矢量，是指它自身的点积等于1。我们用$\hat{n}$表示单位矢量，则$\hat{n}\cdot\hat{n}=1$。如果要求某矢量在$\hat{n}$方向上的分量，我们看到点积$\hat{n}\cdot\vec{A}$是$A\cos\theta$，它就是$\vec{A}$在$\hat{n}$方向上的分量。这是求分量的一种较好的办法。事实上，它能使我们得出所有的分量，并写出一个很有意思的公式。假定，在一个给定的坐标系$x_1x_2x_3$中，我们引入了三个矢量：x_i轴方向的单位矢量记为$\hat{x}_i\left(i=1,2,3\right)$，首先$\hat{x}_i\cdot\hat{x}_i=1$（不求和）。但$\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j\left(i\neq j\right)$是什么呢？当两个矢量互相垂直时它们的点积为零。于是

$$\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j=\delta_{ij} \tag{8}$$

下面表示矢量的方法是等价的

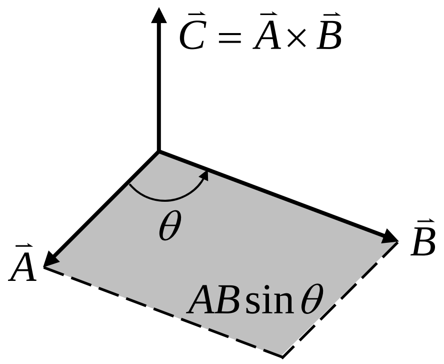
$$\vec{A}=\left(A_1,A_2,A_3\right),\quad \vec{A}=A_i\hat{x}_i=A_1\hat{x}_1+A_2\hat{x}_2+A_3\hat{x}_3 \tag{9}$$

刚才我们通过对 2 阶张量A_iB_j的指标缩并得到了一个标量，即$\vec{A}$和$\vec{B}$的标量积。这个张量的反对称部分（相差一个因子$1/2$）$A_jB_k-A_kB_j$确定了一个（轴）矢量，我们把这个新的矢量称为$\vec{A}$和$\vec{B}$的矢量积（或叉积）

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B},\quad C_i\equiv\varepsilon_{ijk}A_jB_k \tag{10}$$

矢量积对表达转动的特性十分重要，因此，掌握三个矢量$\vec{A},\vec{B},\vec{C}$的几何关系是很重要的。$\vec{C}$的大小可以证明等于$\vec{A}$的大小乘$\vec{B}$的大小再乘两者之间夹角的正弦。$\vec{C}$指向什么方向呢？设想把$\vec{A}$转过一个小于 180 度的角到$\vec{B}$；那么右手螺旋前进的方向就是$\vec{C}$的方向。我们用右手螺旋而不用左手螺旋，这是一个

习惯问题，而且它不断提醒我们，假如 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 是一般意义下的“真正的”矢量，那么由 $\vec{A}\times\vec{B}$ 创造的新的“矢量”是人为的，它的性质与 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 略有差别，因为它是由一个特殊法则构成的（你当然也可以通过 $C_i \equiv -\varepsilon_{ijk}A_jB_k$ 来定义一个矢量，此种情况下你就得用左手螺旋来确定其方向了）。这个差别体现在它们在反演变换下有不同的变换规律。在反演变换下，象位矢 $\vec{r}$ 这样的真正矢量变为 $\vec{r}'=-\vec{r}$；像坐标 $\vec{r}$、速度 $\vec{v}$、动量 $\vec{p}$、力 $\vec{F}$、电场 $\vec{E}$ 等等都是这种矢量，它们有一个专门的名称叫做极矢量；对于两个极矢量（例如 $\vec{r}$ 和 $\vec{p}$），它们的矢量积 $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ 在反演变化下是不变号的：$\vec{L}'=\vec{r}'\times\vec{p}'=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{L}$。这样的矢量叫做轴矢量或赝矢量。角动量 $\vec{L}$ 和力矩 $\vec{\tau}$ 当然就是轴矢量的例子。还可以发现角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和磁场 $\boldsymbol{B}$ 也是轴矢量。



最后，罗列一些有关标量积和矢量积的性质，它们都可利用 ε_{ijk} 的性质很容易地加以证明

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=0 \tag{11}$$
$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

由它们又可导出

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2=A^2B^2-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2 \tag{12}$$