

张量的定义

如果某个量在任一坐标系中由 $\begin{cases} 1 = 3^0 \\ 3 = 3^1 \\ 9 = 3^2 \end{cases}$ 个分量描述，并且在坐标变换

$x'_i = \lambda_{ij} x_j$ 下，其中 $\lambda_{ij} \lambda_{kj} = \delta_{ik}$ ，其分量如下变换： $\begin{cases} \phi' = \phi \\ A'_i = \lambda_{ij} A_j \\ T'_{ij} = \lambda_{ik} \lambda_{jl} T_{kl} \end{cases}$ ，则称

其为 $\begin{cases} \text{标量} \\ \text{矢量} \\ \text{2阶张量} \end{cases}$

类似地可定义更高阶的张量。标量又称为 0 阶张量，而矢量则又被称为 1 阶张量。矢量的分量变换规律与点的坐标的变换规律是相同的，我们可以将其用矩阵表示为

$$\bar{A}' = \lambda \bar{A}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{A}' = \begin{pmatrix} A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

对于矢量除了用这里的列矩阵表示外，我们也经常用来 $\bar{A} = A_1 \hat{x}_1 + A_2 \hat{x}_2 + A_3 \hat{x}_3 = A_i \hat{x}_i$ 。类似的，2 阶张量的分量变换规律也可以用矩阵表示为紧凑的形式：

$$T' = \lambda T \lambda^T \quad (2)$$

也就是说，2 阶张量在不同坐标系中的分量矩阵相差一个相似变换。对于更高阶的张量，通常我们都是用分量来表示的。

标量常见的例子如：质量、温度、圆周率、一个盒子中粉笔的数目，等等。最简单的矢量例子是粒子的位矢。下面举一个二阶张量的例子。

考虑一个线性映射 T ，它把任一矢量 \bar{A} 按照一定规则映射为另外一个矢量

\vec{B} ，通常记为

$$T: \vec{A} \mapsto \vec{B} = T(\vec{A}) \quad (3)$$

这里线性是指 $T(\vec{A} + \vec{B}) = T(\vec{A}) + T(\vec{B})$, $T(a\vec{A}) = aT(\vec{A})$ 。设在某一个坐标系中， \vec{A} 用分量表示为 $A_j \hat{x}_j$ ，由于映射是线性的，有

$$\vec{B} = T(\vec{A}) = T(A_j \hat{x}_j) = A_j T(\hat{x}_j) \quad (4)$$

由于 $T(\hat{x}_j)$ 是某一个矢量，不妨设它在此坐标系中的第 i 个分量为 T_{ij} ，即 $T(\hat{x}_j) = T_{ij} \hat{x}_i$ ，因此

$$\vec{B} = B_i \hat{x}_i = (T_{ij} A_j) \hat{x}_i \quad (5)$$

或者

$$B_i = T_{ij} A_j, \quad (\vec{B} = T\vec{A}) \quad (6)$$

我们有理由把 T_{ij} 称为线性映射 T 在相应坐标系中的分量，因为它完全确定了 T 对任何一个矢量的作用。下面我将证明 T 确实是一个二阶张量，也就是说，其分量满足相应的变换规律。假设有一个新的坐标系，它与原来坐标系由某个正交矩阵 λ 相联系 $x'_i = \lambda_{ij} x_j$ ，在此坐标系中，矢量 \vec{B} 的分量矩阵为

$$\vec{B}' = \lambda \vec{B} = \lambda T \vec{A} = (\lambda T \lambda^T) (\lambda \vec{A}) = T' \vec{A}' \quad (7)$$

也就是说，在新的坐标系中映射 T 的分量矩阵为

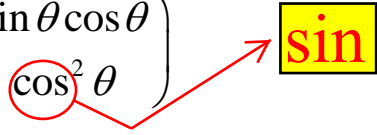
$$T' = \lambda T \lambda^T \quad (8)$$

因此，所有从矢量到矢量的线性映射都是一个 2 阶张量。

最简单的线性映射是恒等映射 $I: \vec{A} \rightarrow I(\vec{A}) = \vec{A}$ ，显然在任一坐标系中其分量矩阵都是单位矩阵 $I_{ij} = \delta_{ij}$ ；主动意义下的转动也是这样一个线性映射，因此它也是一个二阶张量；后面我们还会看到，惯量张量将角速度映射为角动量，它也是一个 2 阶张量，而电磁学中的极化张量则将电场映射为极化强度。再比如矢量在空间某个方向 \hat{n} 上的投影 $T: \vec{A} \mapsto \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{A})$ 。其分量为

$$T_{ij} = n_i n_j \quad (9)$$

如果在某个坐标系中 $\hat{n} = (\cos \theta \quad \sin \theta)$ ，那么

$$T = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (10)$$


在这里我们看到， $T_{ij} = T_{ji}$ ，而且你不难证明，如果一个张量的分量在某一坐标系中关于两个指标交换是不变的，那么这个性质在所有坐标系中也都是成立的，我们将这样的张量称为对称张量。类似的，如果 $T_{ij} = -T_{ji}$ ，那么称张量是反对称的。一个有意思的结论是：反对称张量的独立分量个数则只有 3 个，恰好等于矢量分量的数目。实际上，这三个分量是可以构成一个矢量的，也就是说，它们与矢量的三个分量的变换规律（几乎）一样。为了看出这一点，我们引入一个很有用的记号：排列符号 ε_{ijk} ，其定义如下

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} = \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ is an even permutation of } (123) \\ -1 & (ijk) \text{ is an odd permutation of } (123) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

它关于任意两个指标的交换都是反对称的

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{kji} = -\varepsilon_{ikj} \quad (12)$$

由排列符号的定义可知

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \\ \varepsilon_{132} &= \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1 \\ \varepsilon_{122} &= \varepsilon_{222} = \varepsilon_{212} = 0, \text{ etc.} \end{aligned}$$

排列符号是一个很重要的性质，由定义可知

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{cases} +1 & (ijk) \text{ is an even permutation of } (lmn) \\ -1 & (ijk) \text{ is an odd permutation of } (lmn) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

由此可得到排列符号的一些常用性质

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} &= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} &= \delta_{il}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jl} = 3\delta_{il} - \delta_{il} = 2!\delta_{il} \\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} &= 2!\delta_{ii} = 3!\end{aligned}\quad (14)$$

此外，排列符号的另一些性质涉及行列式的计算，其中最常见的是下面两个关系式：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} &= \varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k} = \det \lambda \\ \varepsilon_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn} &= \varepsilon_{lmn} \det A\end{aligned}\quad (15)$$

这里 A 是某个 3×3 矩阵。

现在假设 T 是一个反对称张量，即 $T_{ij} = -T_{ji}$ ，那么 $C_i = \varepsilon_{ijk}T_{jk}$ 在新的坐标系中的分量就是

$$\begin{aligned}C'_i &= \varepsilon_{ijk}T'_{jk} = \varepsilon_{ijk}\lambda_{jm}\lambda_{kn}T_{mn} \\ &= (\det \lambda)\lambda_{il}\varepsilon_{lmn}T_{mn} = (\det \lambda)\lambda_{il}C_l\end{aligned}\quad (16)$$

我们看到，与通常的矢量定义相比，这里多出了一个因子 $\det \lambda$ ，其含义是：对于转动变换， C_i 与矢量分量的变换规律相同，而对于空间反演，则多出了一个符号。我们将这样的矢量称为赝矢量，或物理上更经常地将其称为轴矢量，而有时也将像位矢这样真正的矢量称为极矢量。