

此时第一界面的折射角为

$$i' = 90^\circ - i_0 \approx 20.83^\circ$$

相应的最大入射角为

$$i = \sin^{-1}(n_o \sin i') \approx 36.14^\circ$$

所以

$$\angle S_o MS = i - (90^\circ - 68^\circ) \approx 14.14^\circ$$

3 用方解石和石英薄板作成钠黄光的 $\lambda/4$ 波片，它们的最小厚度各为多少？

解. $\lambda/4$ 波片的最小厚度 d 应满足

$$(n_o - n_e) d = \pm \frac{\lambda}{4}$$

就 $\lambda = 5892.90 \text{ \AA}$ 的钠黄光来说，对于方解石，

$$(n_o - n_e) = 1.65836 - 1.48641 = 0.17195$$

$$d = \frac{\lambda}{4(n_o - n_e)} \approx 8568 \text{ \AA}$$

对于石英，有

$$(n_e - n_o) = 1.55336 - 1.54425 = 0.00911$$

$$d = \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)} \approx 161715 \text{ \AA} = 16.17 \mu\text{m}$$

4. 两尼科耳棱镜主截面的夹角由 30° 变到 45° ，透射光的强度如何变化？设入射自然光的强度为 I_0 。

解 由马吕斯定律知道，通过第二个尼科耳棱镜后的光强为

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 \alpha$$

式中 α 为两尼科耳棱镜主截面的夹角。

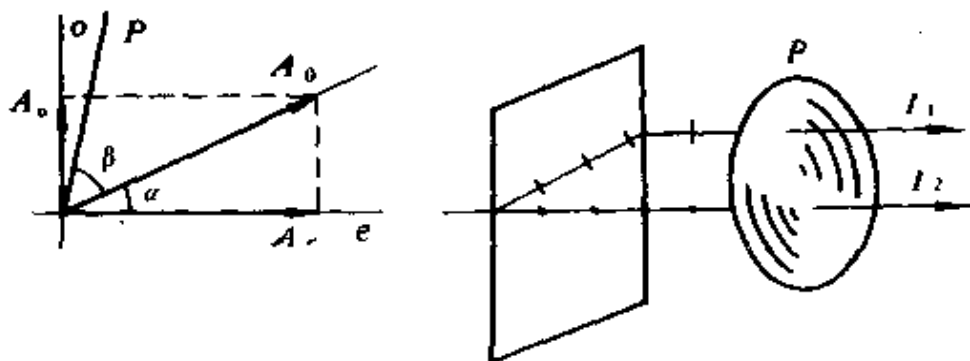
当 $\alpha = 30^\circ$ 时，得

$$I_2 = \frac{3}{8} I_0$$

当 $\alpha = 45^\circ$ 时，得

$$I_2 = \frac{1}{4} I_0$$

5. 单色线偏振光垂直射入方解石晶体，其振动方向与主截面成 30° 角，两折射光再经过置于方解石后的尼科耳棱镜，其主截面与原入射光的振动方向成 50° 角，求两条光线的相对强度。



题 5 图

解 如图，设线偏振光的振幅为 A_0 ，其振动方向与晶体主截面的夹角为 α ，与尼科耳棱镜主截面的夹角为 β 。线偏振光经方解石后分解为 e 振动和 o 振动，其振幅分别为

$$A_e = A_0 \cos \alpha, \quad A_o = A_0 \sin \alpha$$

各自通过尼科耳棱镜后的振幅分别为

$$A_1 = A_e \cos(\alpha + \beta) = A_0 \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha$$

$$A_2 = A_o \sin(\alpha - \beta) = A_0 \sin(\alpha - \beta) \sin \alpha$$

强度之比为

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{A_2^2}{A_1^2} = \frac{\sin^2(\alpha - \beta) \sin^2 \alpha}{\cos^2(\alpha + \beta) \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2(30^\circ - 50^\circ) \sin^2 30^\circ}{\cos^2(30^\circ + 50^\circ) \cos^2 30^\circ} \approx 10.72$$

6. 经尼科耳棱镜观察部分偏振光，当尼科耳棱镜由对应于极大强度的位置转过 60° 时，光强减为一半，求光束的偏振度。

解 如图，部分偏振光的光强极大 I_M 方位与光强极小 I_m 方位总是正交的，任意斜方位的光强 $I(\alpha)$ 是 I_M 和 I_m 的非相干叠加，即

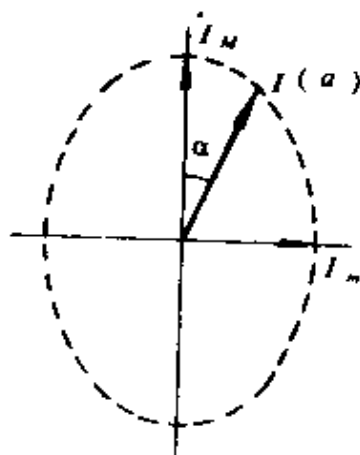
$$I(\alpha) = I_M \cos^2 \alpha + I_m \sin^2 \alpha$$

已知 $\alpha = 60^\circ$ 时， $I(\alpha) = I_M / 2$ ，代入上式求出

$$I_m = \frac{1}{3} I_M$$

因此，该部分偏振光的偏振度为

$$P = \frac{I_M - I_m}{I_M + I_m} = 50\%$$



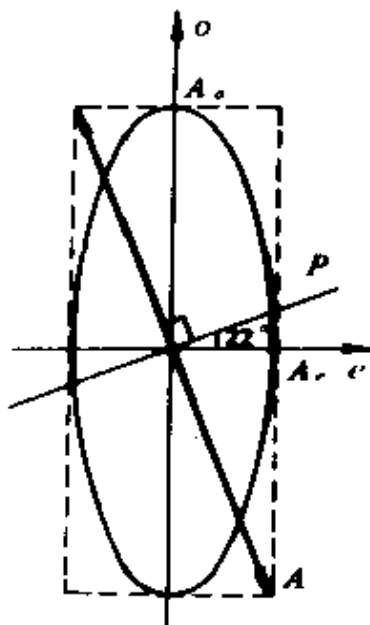
题 6 图

§ 3 圆偏振光和椭圆偏振光的获得和检验

1. 用一块 $\lambda/4$ 片和一块偏振片鉴定一束椭圆偏振光。达到消光位置后， $\lambda/4$ 片的光轴与偏振片透振方向相差 22° ，求椭圆长短轴之比。

解 一椭圆偏振光经 $\lambda/4$ 片以后能有消光位置，这说明 $\lambda/4$ 片的光轴已经对准入射椭圆光的长轴或短轴方向，如图。消光时，偏振片 P 的透振方向与合成线偏振 A 方向正交，而 A 的方位取决于入射椭圆光的长短轴之比，由图可见，长短轴之比为

$$\frac{A_o}{A_e} = \operatorname{tg} 22^\circ \approx 2.5$$



题 1 图

• 2. 一强度为 I_0 的右旋圆偏振光垂直通过 $\lambda/4$ 片 (此 $\lambda/4$ 片由方解石做成, o 光和 e 光在晶片中的光程差正好是 $\lambda/4$), 然后再经过一块主截面相对于 $\lambda/4$ 片向右旋 15° 的尼科耳棱镜, 求最后出射的光强 (忽略反射、吸收等损失)。

解 先考察射向尼科耳棱镜的是一种什么状态的偏振光, 为此分析两垂直分量间的位相差

$$\delta_1 = +\frac{\pi}{2}$$

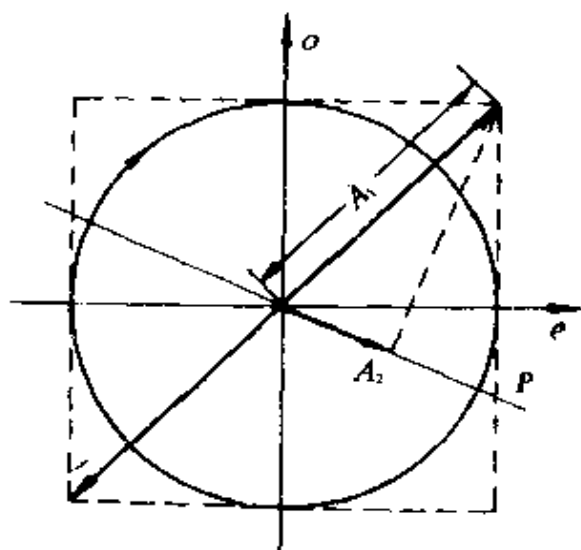
$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{4} \right) = -\frac{\pi}{2}$$

其中 δ_1 是 $\lambda/4$ 片入射点的位相差, δ_2 是 $\lambda/4$ 片体内传播附加位相差。所以总位相差为

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 0$$

这说明它是一个在一、三象限的线偏振光 (如图), 强度为 I_{10} 。按马吕斯定律就很容易算出它再通过尼科耳棱镜 P 的强度为

$$I_P = I_{10} \cos^2(45^\circ + 15^\circ) = \frac{1}{4} I_0$$



题 2 图

§ 4 偏振光的干涉及其应用

1. 一平行于光轴切割的一块方解石晶片, 被放置在一对尼科耳棱镜之间, 光轴方向与两个棱镜主截面均成 15° 角, 求:

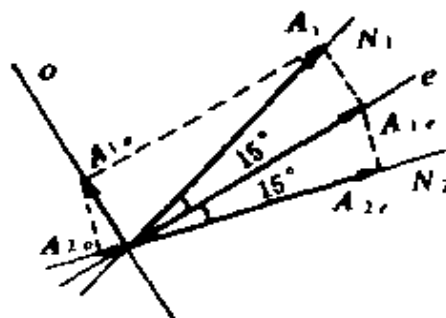
- (1) 从方解石晶片射出的 o 光和 e 光的振幅和光强;
- (2) 投影于第二个尼科耳棱镜的 o 光和 e 光的振幅和光强;

设入射自然光的光强为 $I_0 = A^2$ ，反射和吸收等损失可以忽略。

解 (1) 如图，设经第一个尼科耳棱镜 N_1 后的线偏振光的振幅为 A_1 ，光强为 I_1 ，则

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} A^2$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} A$$



题 1 图

从方解石晶片出射的 e 光和 o 光的振幅分别为

$$A_{1e} = A_1 \cos 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} A \cos 15^\circ \approx 0.68 A$$

$$A_{1o} = A_1 \sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} A \sin 15^\circ \approx 0.18 A$$

光强分别为

$$I_e = A_{1e}^2 = \frac{1}{2} A^2 \cos^2 15^\circ = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 15^\circ \approx 0.47 I_0$$

$$I_o = A_{1o}^2 = \frac{1}{2} A^2 \sin^2 15^\circ = \frac{1}{2} I_0 \sin^2 15^\circ \approx 0.03 I_0$$

(2) 投影于第二个尼科耳棱镜 N_2 的 e 光和 o 光的振幅分别为

$$A_{2e} = A_{1e} \cos 15^\circ = A_1 \cos^2 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} A \cos^2 15^\circ \approx 0.66 A$$

$$A_{2o} = A_{1o} \sin 15^\circ = A_1 \sin^2 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} A \sin^2 15^\circ \approx 0.05 A$$

光强分别为

$$I'_e = A_{2e}^2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^4 15^\circ \approx 0.44 I_0$$

$$I'_o = A_{2o}^2 = \frac{1}{2} I_0 \sin^4 15^\circ \approx 0.0022 I_0$$

* 2. 强度为 I_0 的单色平行光通过正交尼科耳棱镜。现在两尼科耳棱镜之间插入一 $\lambda/4$ 片，其主截面与第一尼科耳棱镜的主截面成 60° 角。求出射光的强度（忽略反射、吸收等损失）。

解 用偏振光干涉的方法求解。如图，将通过第一个尼科耳棱镜 N_1 的线偏振光的振幅 A_1 两次投影，得第二个尼科耳棱镜 N_2 透振方向的两个振动的振幅 A_{2e} 、 A_{2o} ，其值分别为

$$A_{2e} = A_1 \cos\alpha \sin\alpha \\ = \frac{1}{2} A_1 \sin 2\alpha$$

$$A_{2o} = A_1 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{1}{2} A_1 \sin 2\alpha$$

再仔细分析这两个振动之间的总的位相差

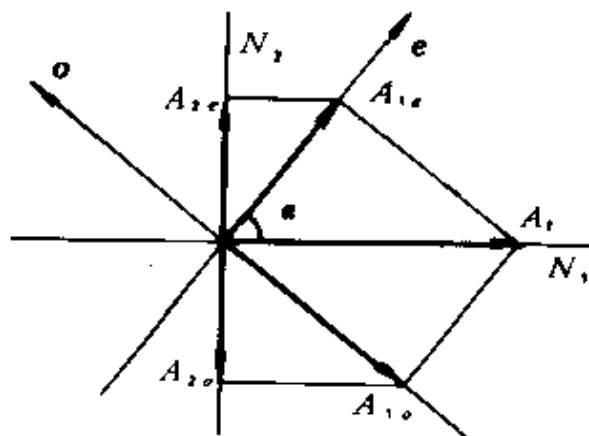
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

式中 δ_1 为 $\lambda/4$ 片的入射点的 o 、 e 振动的位相差，目前 $\delta_1 = \pi$ ； δ_2 为晶片体内传播附加的位相差，目前 $\delta_2 = \pm\pi/2$ ，现取 $\delta_2 = +\pi/2$ ； δ_3 为 o 轴、 e 轴正向朝 N_2 投影的位相差，目前 $\delta_3 = 0$ 。所以

$$\delta = \frac{3}{2}\pi$$

最后通过 N_2 的光强 I_2 是 A_{2e} 、 A_{2o} 相干叠加的结果，即

$$I_2 = A_{2e}^2 + A_{2o}^2 + 2A_{2e}A_{2o}\cos\delta \\ = \frac{1}{4}A_1^2 \sin^2 120^\circ + \frac{1}{4}A_1^2 \sin^2 120^\circ \\ = \frac{6}{16}A_1^2 = \frac{3}{16}I_0$$



题 2 图

如果取 $\delta_2 = -\pi/2$ ，上述交叉项仍然为零， I_3 值不变。

3. 一块 $d = 0.025 \text{ mm}$ 厚的方解石晶片，表面平行于光轴，放在正交尼科耳棱镜之间，晶片的主截面与它们成 45° 角，试问：

(1) 在可见光范围内哪些波长的光不能通过？

(2) 如果将第二个尼科耳棱镜的主截面转到与第一个平行，哪些波长的光不能通过？

解 如图所示。这是一个由偏振光干涉而引起的显色问题。须知，对于给定的某一厚度的晶片来说，虽然 o 光 e 光的光程差是确定的，即

$$\Delta L = (n_o - n_e) d$$

但位相差 $\Delta\varphi$ 却因波长而异

$$\Delta\varphi = \varphi_e - \varphi_o = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d$$

凡是使位相差满足

$$\Delta\varphi = 2k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

的那些波长的光，从晶片出来以后仍为与 P_1 透振方向一致的线偏振光，如图，因 P_2 与 P_1 正交，这些光将不能通过 P_2 。据此，算出这一系列波长 λ_k 应满足

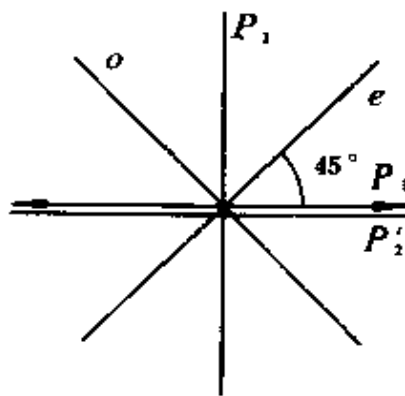
$$\lambda_k = \frac{(n_o - n_e) d}{k}$$

将钠黄光的 n_o, n_e 及 d 值代入上式分子，得

$$\begin{aligned} (n_o - n_e) d &= (1.65836 - 1.48641) \times 0.025 \text{ mm} \\ &= 42987.5 \text{ \AA} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &\approx 3908 \text{ \AA}, & \lambda_{10} &\approx 4299 \text{ \AA} \\ \lambda_9 &\approx 4776 \text{ \AA}, & \lambda_8 &\approx 5373 \text{ \AA} \\ \lambda_7 &\approx 6141 \text{ \AA}, & \lambda_6 &\approx 7165 \text{ \AA} \end{aligned}$$



题 3 图

$$\lambda_{10} \approx 8598 \text{ \AA}$$

以上 $\lambda_{10}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{11}$ 大体落在可见光波段。

(2) 如果 P_2 转到 P_1 方向，情况正好相反，上述几种波长的光将完全通过 P_2 ，而使位相差满足

$$\Delta\varphi = (2k + 1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

的那些波长的光，经晶片作用后，虽然仍为线偏振光，但其振动方向绕光轴转了 $\Delta\theta = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ ，正好与 P_2 正交而消光。

据此，算出这一系列波长 λ'_k 应满足

$$\lambda'_k = \frac{(n_o - n_e)d}{k + \frac{1}{2}} = \frac{42987.5 \text{ \AA}}{k + \frac{1}{2}}$$

故

$$\lambda'_{10} \approx 4094 \text{ \AA}, \quad \lambda'_0 \approx 4525 \text{ \AA}$$

$$\lambda'_1 \approx 5057 \text{ \AA}, \quad \lambda'_1 \approx 5732 \text{ \AA}$$

$$\lambda'_2 \approx 6613 \text{ \AA}, \quad \lambda'_2 \approx 7816 \text{ \AA}$$

这些波长大体落在可见光波段之内。

4. 两尼科耳棱镜主截面夹角为 60° ，中间插入一块水晶的 $\lambda/4$ 片，其主截面平分上述夹角，光强为 I_0 的自然光入射，试问：

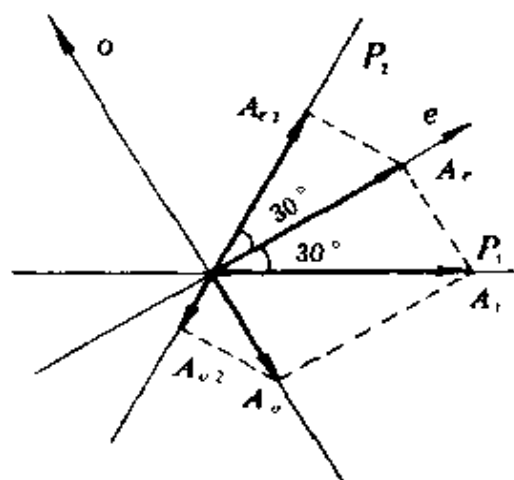
(1) 通过 $\lambda/4$ 片后光的偏振态；

(2) 通过第二尼科耳

棱镜的光强。

解 (1) 自然光通过第一尼科耳棱镜后成为线偏振光，再通过 $\lambda/4$ 片后成为 (正) 椭圆偏振光。

(2) 用偏振光干涉的方法求此椭圆光通过第二个尼科耳棱镜 P_2 的光强，为此分别求出振幅 (参见附图)



题 4 图

$$A_{e_2} = A_e \cos 30^\circ = A_1 \cos^2 30^\circ$$

$$A_{o_2} = A_o \sin 30^\circ = A_1 \sin^2 30^\circ$$

投影于 P_2 方向的两个扰动的位相差为

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

式中 δ_1 为 $\lambda/4$ 片的入射点的位相差， δ_2 为晶片体内传播的附加位相差， δ_3 为 oe 坐标系正向朝 P_2 投影引起的位相差，目前

$$\delta_1 = \pi, \quad \delta_2 = \pm \frac{\pi}{2}, \quad \delta_3 = 0$$

故

$$\delta = \pi \pm \frac{\pi}{2}$$

于是出射光强

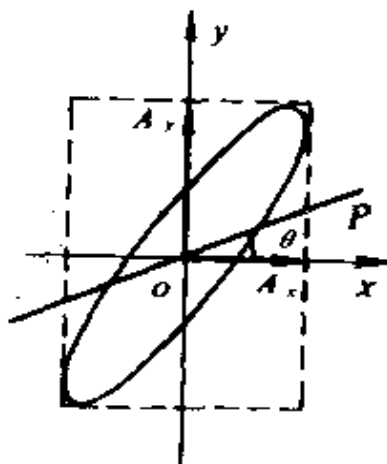
$$\begin{aligned} I_2 &= A_2^2 = A_{e_2}^2 + A_{o_2}^2 + 2A_{e_2}A_{o_2}\cos\delta \\ &= A_{e_2}^2 + A_{o_2}^2 = \frac{10}{16}A_1^2 = \frac{5}{16}I_0 \end{aligned}$$

* 5. 试求斜椭圆偏振光 (1) 任意方位的光强，(2) 长短轴方位以及强度极大值和极小值。

解 在讨论偏振光干涉或椭圆偏振光的产生和检验一类问题时，我们可能经常遇到这样的情形，对于给定的坐标系来说，椭圆不是正的，而是斜的，这是由两个正交振动 $E_y(t)$ 与 $E_x(t)$ 之间的位相差 $\delta \neq \pm\pi/2, 0, \pi$ 而引起的。设

$$\begin{cases} E_x(t) = A_x \cos \omega t \\ E_y(t) = A_y \cos(\omega t + \delta) \end{cases}$$

(1) 先求此斜椭圆光通过偏振片 P 以后的光强 $I(\theta)$ ， θ 为偏振片透振方向与坐标轴之一的夹角，如图 (a)。分别将振动 $E_x(t)$ 与 $E_y(t)$ 向 P 方向投影，得



题 5 图 (a)

$$\begin{cases} E_{x\rho}(t) = A_x \cos \theta \cos \omega t \\ E_{y\rho}(t) = A_y \sin \theta \cos(\omega t + \delta) \end{cases}$$

两者叠加便是通过偏振片的振动，即

$$\begin{aligned} E_\rho(t) &= E_{x\rho}(t) + E_{y\rho}(t) \\ &= A_\rho \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

由一维同频简谐量合成公式得

$$\begin{cases} I(\theta) = A_\rho^2 \\ \quad = (A_x \cos \theta)^2 + (A_y \sin \theta)^2 + 2(A_x \cos \theta)(A_y \sin \theta) \cos \delta \\ \quad = I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta + \sqrt{I_x I_y} \sin 2\theta \cos \delta \quad (a) \\ \varphi = \arctan \left(\frac{A_y \sin \theta \sin \delta}{A_x \cos \theta + A_y \sin \theta \cos \delta} \right) \quad (b) \end{cases}$$

式(a)是已知 I_x 、 I_y 、 δ ，求 $I(\theta)$ 的一般公式。式(b)给出的 φ 值，对于光强的观测没有直接意义。

(2) 如要确定此时斜椭圆的长短轴方位及相应的强度极大值 I_v 和强度极小值 I_m ，有两种方法可供选择。一种是纯解析几何方法，作转动坐标变换，将斜椭圆轨迹方程

$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - 2 \frac{E_x E_y}{A_x A_y} \cos \delta = \sin^2 \delta$$

中的交叉项消除掉，成为椭圆的标准方程，便可求解。我们常用另一种方法，即偏振光干涉的光学方法求解，将 $I(\theta)$ 表达式中的 θ 看作变量而求其极值。为此改写 $I(\theta)$ 为

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \frac{1}{2} I_x (1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{2} I_y (1 - \cos 2\theta) \\ &\quad + \sqrt{I_x I_y} \sin 2\theta \cos \delta \\ &= \frac{1}{2} (I_x + I_y) + \frac{1}{2} (I_x - I_y) \cos 2\theta \\ &\quad + \sqrt{I_x I_y} \cos \delta \sin 2\theta \end{aligned}$$

$$\text{令 } I_1 = \frac{1}{2}(I_x + I_y), I_2 = \frac{1}{2}(I_x - I_y), I_3 = \sqrt{I_x I_y} \cos \delta,$$

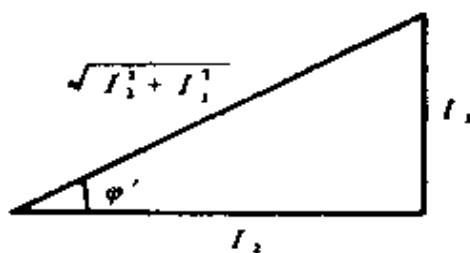
将 $I(\theta)$ 简化为

$$\begin{cases} I(\theta) = I_1 + I_2 \cos 2\theta + I_3 \sin 2\theta \\ \quad = I_1 + \sqrt{I_2^2 + I_3^2} \cos(2\theta - \varphi') \\ \varphi' = \arctan \frac{I_3}{I_2}, \text{ 或 } \varphi' = \cos^{-1} \frac{I_2}{\sqrt{I_2^2 + I_3^2}} \end{cases}$$

式中 φ' 与 I_2, I_3 的关系如图 (b)

所示。显然， $I(\theta)$ 的极值条件为：

当 $\theta = \frac{\varphi'}{2}$ 时，有极大值



题 5 图 (b)

$$I_M = I_1 + \sqrt{I_2^2 + I_3^2}$$

$$= \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 2I_x I_y \cos 2\delta} \quad (c)$$

当 $\theta = \frac{\varphi'}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ 时，有极小值

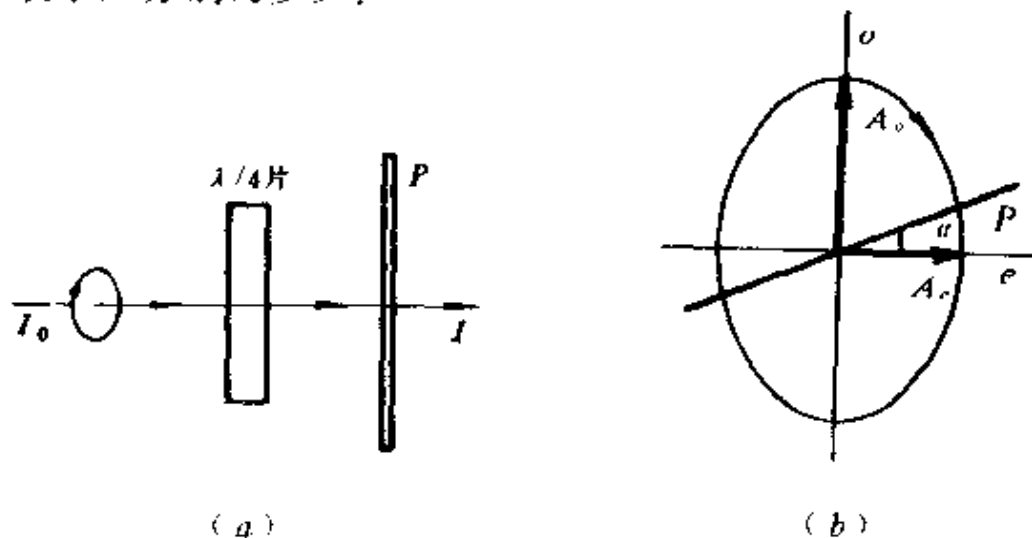
$$I_m = I_1 - \sqrt{I_2^2 + I_3^2}$$

$$= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 2I_x I_y \cos 2\delta} \quad (d)$$

* 6. 如图 (a)，波长为 λ 的右旋椭圆偏振光通过由负晶体制成的一块波晶片。椭圆光的总强度为 I_0 ，其强度极大值与极小值之比为 4 比 1；波晶片的光轴已对准椭圆光的短轴方向，其造成的（有效）光程差 $(n_o - n_e)d = \lambda/6$ ；偏振片透振方向与光轴夹角为 $\alpha = \pi/6$ 。

(1) 求出射光强 I （以 I_0 表示）；

- (2) 如果入射光改为左旋, 其它条件不变, 出射光强为多少?
 (3) 在偏振片转动过程中, 出射光强的极大值和极小值(以 I_0 表示) 分别为多少?



题 6 图

解 按题意作图(b), 图中 $\alpha = \pi/6$.

(1) 由

$$\begin{aligned} I_M + I_m &= I_0 \\ I_M &= 4I_m \end{aligned}$$

得

$$I_M = I_m = \frac{4}{5}I_0, \quad I_r = I_m = \frac{1}{5}I_0$$

现用偏振光干涉的方法求 $I(\alpha)$, 则可直接利用题5中的公式(a)

$$I(\alpha) = I_m \cos^2 \alpha + I_M \sin^2 \alpha + \sqrt{I_m I_M} \sin 2\alpha \cos \delta$$

式中 δ 是从波晶片出射后的 o 振动与 e 振动之间的位相差, 它应当等于入射点的位相差 δ_1 和体内传播附加位相差 δ_2 之和

$$\delta_1 = \varphi_o - \varphi_e = +\frac{\pi}{2}$$

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o) d = -\frac{\pi}{3}$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{\pi}{6}$$

最后得

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{1}{5}I_0 \cos^2 \frac{\pi}{6} + \frac{4}{5}I_0 \sin^2 \frac{\pi}{6} + \frac{2}{5}I_0 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{3}{20}I_0 + \frac{4}{20}I_0 + \frac{6}{20}I_0 = \frac{13}{20}I_0 \end{aligned}$$

(2) 如果入射光改为左旋，则

$$\delta'_1 = \varphi_o - \varphi_e = -\frac{\pi}{2}$$

$$\delta_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d = -\frac{\pi}{3}$$

$$\delta = \delta'_1 + \delta_2 = -\frac{5}{6}\pi$$

$$\cos \delta = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

出射光强为

$$I'(\alpha) = \frac{3}{20}I_0 + \frac{4}{20}I_0 - \frac{6}{20}I_0 = \frac{1}{20}I_0$$

显然它不等于题(1)右旋光入射时的结果。

(3) 由于从波晶片出射的两个正交振动之间的位相差为 $\delta = \pi/6$ ，故它们合成为斜椭圆光。求斜椭圆长短轴方位及光强极值问题可直接利用题5给出的公式(c)和(d)，得本题结果为

$$\begin{aligned} I_v &= \frac{1}{2}I_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \cos \frac{\pi}{3}} I_0 \\ &= \frac{5 + \sqrt{21}}{10}I_0 \approx 0.96I_0 \end{aligned}$$

$$I_m = \frac{5 - \sqrt{21}}{10} I_0 \approx 0.04 I_0$$

还可以算出偏振片 P 相对于 e 轴的方位角（即椭圆长短轴的方位）分别为

$$\begin{aligned} \alpha_M &= -\frac{1}{2}\varphi' = -\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{I_2}{\sqrt{I_x^2 + I_y^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\cos^{-1}\left[\frac{\frac{1}{2}(I_x - I_y)}{\frac{1}{2}\sqrt{I_x^2 + I_y^2 + 2I_x I_y \cos 2\delta}}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\cos^{-1}\left[\frac{\frac{1}{5} - \frac{4}{5}}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \cos 60^\circ}}\right] \\ &= -\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(-\frac{3}{\sqrt{21}}\right) \approx -\frac{1}{2}(180^\circ - 49.11^\circ) \approx 65.45^\circ \\ \alpha_m &= \alpha_M + 90^\circ \approx 155.45^\circ \end{aligned}$$

7. 楔形水晶棱镜顶角 $\alpha = 0.5^\circ$ ，棱边与光轴平行，置于正交尼科耳棱镜之间，使其主截面与两尼科耳棱镜的主截面都成 45° 角，以水银的 4047 \AA 紫色平行光正入射，问：

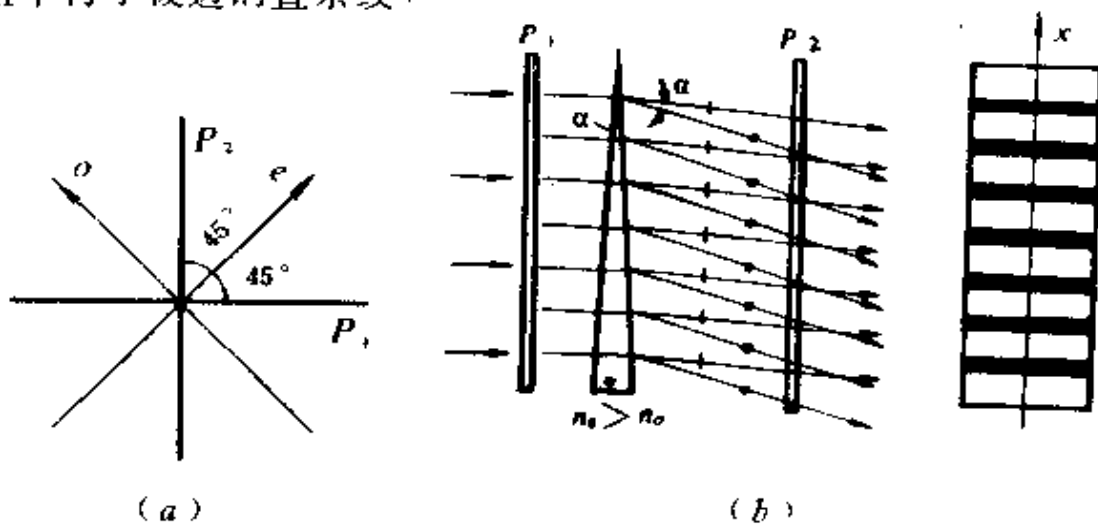
- (1) 通过第二尼科耳棱镜看到的干涉图样如何？
- (2) 相邻暗纹的间隔 d 等于多少？
- (3) 若将第二尼科耳棱镜的主截面转 90° ，干涉图样有何变化？
- (4) 维持两尼科耳棱镜正交，但把水晶棱镜的主截面转 45° ，使之与第二尼科耳棱镜的主截面垂直，干涉图样有何变化？

解 (1) 如图(a), 当第一个尼科耳棱镜的透振方向 P_1 与水晶棱镜的 e 轴成 45° 夹角时, 从 P_1 透射出来的线偏振光进入水晶后被分解为 o 光和 e 光。如图(b) 所示, 目前 o 振动平行纸面, e 振动垂直纸面。水晶为正晶体, o 光比 e 光传播快, 即 $n_o < n_e$ 。由于水晶棱镜厚度连续变化, 使出射面(斜面)上下各点的两个正交振动之间的位相差也随之连续变化, 合成结果为各种状态的椭圆光。就传播方向看, 它们经斜面折射成为两束平行光, 其偏向角(相对于入射方向)在顶角 α 很小的条件下分别近似为

$$\delta_e \approx (n_e - 1) \alpha$$

$$\delta_o \approx (n_o - 1) \alpha$$

于是后场是这两束平行光的叠加场。如果安置第二个偏振片(尼科耳棱镜) P_2 , 后场就成为这两束平行光的干涉场, 干涉图样是一组平行于棱边的直条纹。



题 7 图

(2) 可以按照我们熟悉的两束平行光干涉的条纹间距公式, 直接求得目前水晶棱镜造成的相邻暗纹的间距为

$$\begin{aligned} d: \Delta x &= \frac{\lambda}{\sin \delta_e - \sin \delta_o} \approx \frac{\lambda}{\delta_e - \delta_o} \\ &= \frac{\lambda}{(n_e - n_o) \alpha} \end{aligned}$$

按 $\lambda = 4047 \text{ \AA}$ ， $n_e = 1.56671$ ， $n_o = 1.55716$ ， $\alpha = 0.5^\circ$ 算出

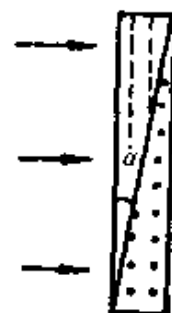
$$\Delta x \approx 4.86 \text{ mm}$$

这些暗纹的具体位置正是使位相差为 $\Delta\varphi = 2k\pi$ 的那些地点。

(3) 当我们将第二个尼科耳棱镜的透振方向（主截面）转 90° ，与第一个尼科耳棱镜一致时，由于 o 轴、 e 轴正向在 P_2 方向投影的位相差与未转动时相比增加了 π ，所以原来的暗线就成为亮纹，而原来的亮纹位置出现了暗线。其它方面，诸如条纹的形状、间距等均无变化。

(4) 如果将水晶棱镜主截面转 45° 而与 P_1 主截面一致，则射入水晶棱镜的是单纯 e 光，此时 o 振动与 e 振动的位相差不起作用，从棱镜出射的是同一振动方向的线偏振光，被 P_2 全部消光， P_2 后方一片暗场。

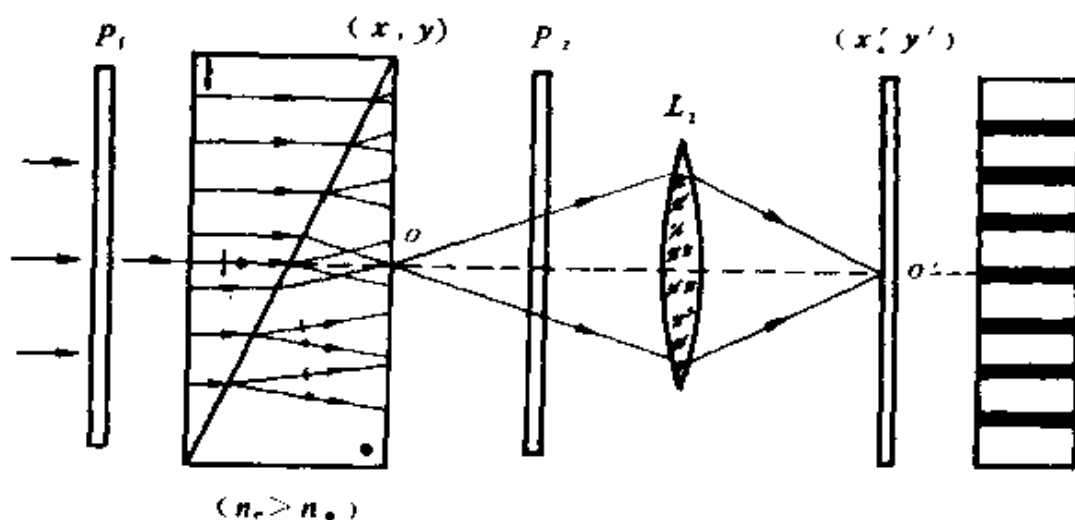
8. 巴俾涅补偿器的结构如图(a)所示，它由两个楔形的石英棱镜组成，光轴方向如图。问：



题 8 图 (a)

(1) 将巴俾涅补偿器放在正交偏振片之间，你将看到什么现象？

(2) 若楔角 $\alpha = 2.75^\circ$ ，用平行的钠黄光照明，求干涉条纹的间隔。



题 8 图 (b) 巴俾涅补偿器

解 (1) 首先分析巴俾涅补偿器的工作原理和特性。经偏振片 P_1 后的线偏振光正入射于补偿器时，被分解为两个正交振动 A_{\parallel} 和 A_{\perp} ，如图(b)， A_{\parallel} 平行纸面， A_{\perp} 垂直纸面。 A_{\parallel} 先后以折射率 n_e, n_o 通过两块棱镜， A_{\perp} 先后以折射率 n_o, n_e 通过两块棱镜。于是，在第一个棱镜内传播的包含两个正交振动的一束平行光，经界面(斜面)后，就开始分离为两束不同方向的平行光。其偏向角(相对于以虚线表示的入射方向)在楔角 α 很小的条件下分别近似为

$$\alpha_{\parallel} \approx \left(\frac{n_e}{n_o} - 1 \right) \alpha > 0 \quad (\text{朝上})$$

$$\alpha_{\perp} \approx \left(\frac{n_o}{n_e} - 1 \right) \alpha < 0 \quad (\text{朝下})$$

夹角为

$$\Delta\alpha = \alpha_{\parallel} - \alpha_{\perp} \approx 2 \left(\frac{n_e}{n_o} - \frac{n_o}{n_e} \right) \alpha$$

由此可见，界面以后的空间是两束不同传播方向而振动方向又互相垂直的平行光的叠加场。这两束平行光在出射面 xy 内的位相分布分别为

$$\begin{aligned} \varphi_{\parallel}(x, y) &= -\frac{2\pi}{\lambda} \sin\alpha_{\parallel} x + \varphi_{\parallel}(0) \\ &\approx -\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{n_e}{n_o} - 1 \right) \alpha x + \varphi_{\parallel}(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\perp}(x, y) &= -\frac{2\pi}{\lambda} \sin\alpha_{\perp} x + \varphi_{\perp}(0) \\ &\approx -\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{n_o}{n_e} - 1 \right) \alpha x + \varphi_{\perp}(0) \end{aligned}$$

式中 $\varphi_{\parallel}(0)$ 和 $\varphi_{\perp}(0)$ 分别为两个振动在中心点 O (两楔形棱镜等厚路线所指的地点) 的位相，由于两个棱镜对光程的互补作用，致使 $\varphi_{\parallel}(0) = \varphi_{\perp}(0)$ ，于是两束平行光的位相差分布为

$$\Delta\varphi(x, y) = \varphi_{\perp} - \varphi_{\parallel} = \frac{2\pi}{\lambda} 2 \left(\frac{n_e}{n_o} - \frac{n_o}{n_e} \right) \alpha x$$

从位相差随 x 连续线性变化这一点上看，几何厚度处处相等的补偿器，相当于一个厚度连续变化的楔形晶片。但是与单块楔形晶片不同，补偿器在 $x=0$ 的中心地带（即 y 轴）的位相差为零，以此为准确的参考线，朝上下两方展开，位相差依次为 $\Delta\varphi(x) = 0, \pm\pi/4, \pm\pi/2, \pm\pi, \pm5\pi/4, \pm3\pi/2, \pm2\pi, \dots$ 因此，两束平行光在 xy 面上的合成振动为各种状态的椭圆光，当然若干处仍然是线偏振光，而中心地带必定是与 P_1 透振方向一致的线偏振光。补偿器的特点就在于此。利用这一特点于偏振光干涉，可以对体内传播引起的附加位相差进行绝对测量。

为使两束平行光产生相干叠加，必须置放第二个偏振片 P_2 。考虑到这两束平行光从 xy 面出射到空气时将要进一步分离，如果直接接收的屏幕离得较远，将不可能获得交叠区域。实验上最好的方法是加一个透镜 L_2 将物面 xy 成象于 $x'y'$ 而实现相干叠加。此时象面上将出现一系列平行等距的直条纹。如果所成象的横向放大率等于 1，则由两束平行光相干叠加的条纹间距公式得条纹间隔为

$$\begin{aligned} \Delta x' = \Delta x &= \frac{\lambda}{\sin\alpha_{\parallel} - \sin\alpha_{\perp}} \approx \frac{\lambda}{\Delta\alpha} \\ &= \frac{\lambda}{2 \left(\frac{n_e}{n_o} - \frac{n_o}{n_e} \right) \alpha} = \frac{n_o n_e \lambda}{2(n_e + n_o)(n_e - n_o)\alpha} \\ &\approx \frac{\lambda}{4(n_e - n_o)\alpha} \end{aligned}$$

当 P_1, P_2 正交时，中心地带（ y' 轴）必定是暗线（零级暗线）。

如果不用透镜在象面上接收，而用肉眼在 P_2 后方观察，所看到的现象将因人而异，取决于你的眼睛聚焦于何处。当眼睛（习惯于）聚焦在眼前的实物 P_2 ，而 P_2 又是贴近 xy 平面时观察到的

现象，这与透镜接收时相同。

(2) 取 $\alpha = 2.75^\circ$, $n_o = 1.54425$, $n_e = 1.55336$, $\lambda = 5893 \text{ \AA}$, 算出条纹间隔为

$$\Delta x \approx 0.52 \text{ mm}$$

9. 以线偏振光照在巴俾涅补偿器（参见上题）上，通过偏振片观察时在中央两楔形棱镜厚度 $d_1 = d_2$ 处有一暗线，与中央暗线距离 a 处又有一暗线。今以同样波长的椭圆偏振光照在此巴俾涅补偿器上，发现（中央）暗线移至离中央 b 处。

(1) 求椭圆偏振光在补偿器晶体中分解成的两个振动分量的初始位相差与 a, b 的关系；

(2) 如果椭圆的长短轴正好分别与两楔形棱镜的光轴平行，试证此时 $b = a/4$ ；

(3) 设已知偏振片的透振方向与补偿器一楔的光轴夹角为 θ ，找出 θ 与(2)问中椭圆长短轴比值的关系。

解 (1) 因相邻暗线间距为 a ，对应的位相差改变为 2π ，所以同级暗线位移 b 时，位相差改变量为

$$\delta_1 = \frac{2\pi}{a} b$$

这也正是入射椭圆光两个正交振动 A_{\perp} 与 A_{\parallel} 的初始位相差值，它被补偿器带来的附加位相差所抵消，在非中心的某处出现了零级暗线。

(2) 此时椭圆光为正椭圆，位相差 δ_1 只有取 $\pm\pi/2$ 两种可能，即

$$\delta_1 = \pm \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{a} b$$

解得

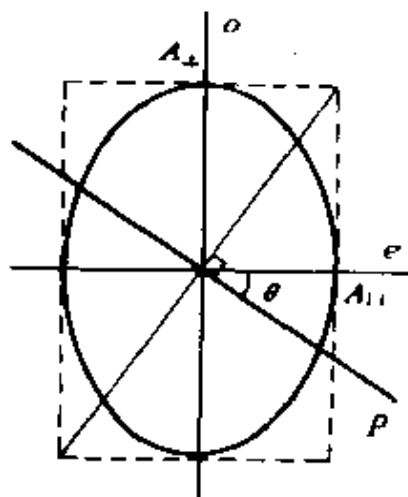
$$b = \pm \frac{a}{4}$$

式中 + 号说明暗线向上位移，此时入射椭圆光为右旋；- 号说明暗线向下位移，相应的入射椭圆光为左旋。

(3) 在巴俾涅补偿器后面加偏振片观测，对于暗线位置来说，如图，必须保证偏振片的透振方向 P 与从补偿器出射的两个正交振动 A_{\perp} , A_{\parallel} 合成的线偏振方向彼此正交，从图中可见，此时偏振片透振方向与补偿器一楔光轴的夹角 θ 应满足

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{A_{\perp}}{A_{\parallel}} \right)$$

式中 A_{\perp}/A_{\parallel} 为入射正椭圆偏振光长短轴之比。



题 9 图

*10. 附图(a)所示为杨氏干涉装置，其中 S 为单色自然光源， S_1 和 S_2 为双孔。

(1) 如果在 S 后放置一偏振片 P ，干涉条纹是否发生变化？有何变化？

(2) 如果在 S_1 , S_2 之前再各放置一偏振片 P_1 , P_2 ，它们的透振方向相互垂直，并都与 P 的透振方向成 45° 角，幕 Σ 上强度分布如何？

(3) 在 Σ 前再放置一偏振片 P' ，其透振方向与 P 平行，试比较在这种情形下观察到的干涉条纹与 P_1 , P_2 , P' 都不存在时的干涉条纹有何不同？

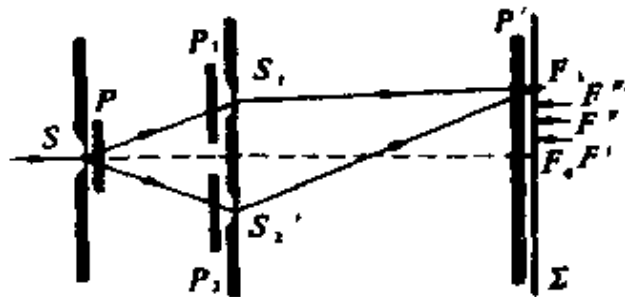
(4) 同(3)，如果将 P 旋转 90° ，幕上干涉条纹有何变化？

(5) 同(3)，如果将 P 撤去，幕上是否有干涉条纹？

(6) 类似(2)的布置，屏幕 Σ 上的 F_0 , F_1 分别是未加 P_1 , P_2 时 0 级和 1 级亮纹所在处， F' , F'' , F''' 分别是 F_0 , F_1 的四等分点。试说明 F_0 , F_1 及 F' , F'' , F''' 各点的偏振状态。

解 (1) 插入 P 后，干涉条纹的形状、间距、反衬度均不发生变化。但由于自然光通过偏振片 P 时强度减半，导致屏幕上的平均强度减半，干涉条纹的亮度下降。

(2) 由于 P_1, P_2 的透振方向相互正交，干涉场是两束振动方向互相垂直的线偏振光的叠加。这时不满足“振动方向相同”这一相干条件，屏幕上得不到干涉条纹，而是一片均匀照明，其强度是两束线偏振光的非相干叠加。



题10图 (a)

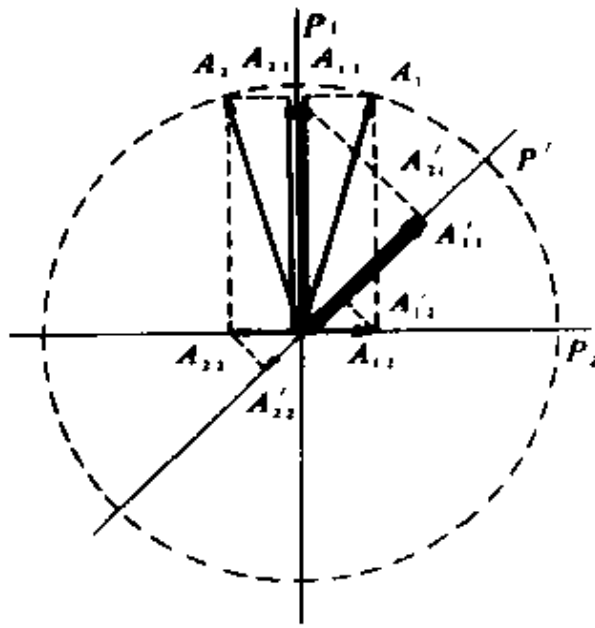
(3) 这时经 P_1, P_2 出射的两相互正交的线偏振光，都再次投影到 P' 的透振方向上，使“振动方向相同”这一相干条件重新得到满足，屏幕 Σ 上又出现了干涉条纹。条纹的形状、间距、反衬度均与 P_1, P_2, P' 都不存在时相同，但由于偏振片的二向色性， P_1, P_2, P' 分别吸收了入射线偏振光中与其透振方向垂直的分量，因此，与只有 P 单独存在时相比，干涉条纹的亮度下降。

(4) 如果在 (3) 的布置中，把 P 的透振方向旋转 90° ，由于两次投影引起的附加位相差改变了 π ，使原来的亮纹位置变成了暗纹而原来的暗纹位置现在变成了亮纹条纹。其它性质均不发生变化。

(5) 在 (3) 的情况中如果将 P 撤去，则投影到透振方向 P' 上的两个正交振动是来自于自然光的两个垂直分量。两自然光中的两个垂直分量之间是没有稳定的位相关系的。因此，尽管这时“振动方向相同”这一相干条件仍然满足，但由于“位相差稳定”这一相干条件被破坏，屏幕上得到的是双光束的非相干叠加，即此时干涉条纹消失， Σ 面上的照明趋于均匀。

关于自然光的两个垂直分量之间是没有稳定位相关系的这一结论，我们已在第二章 §9 节习题 3 中，用反证法作了证明。现在，我们将通过分析自然光的细微结构，用另一种方法来证明这一结论。自然光是大量的、位相无规的、轴对称分布的线偏振光的

集合（如图）（*b*），任取两个对称于 P_1 的线偏振光 A_1 和 A_2 ， A_1 经两次投影于 P' 方向后，其强度是 A'_{11} 和 A'_{12} 的相干叠加； A_2 经两次投影于 P' 方向后其强度是 A'_{21} 和 A'_{22} 的相干叠加。由对称性知， $A'_{11} = A'_{21}$ ， $A'_{12} = A'_{22}$ ，又由图可见， A_1 和 A_2 分别在两次投影过程中引起的附加位相差相差 π 。因此，



题10图（*b*）

此，分别相干叠加时得到的两个交叉项（干涉项）大小相等，符号相反，再次叠加时干涉项互相抵消，所以透过 P' 的强度仍为非相干叠加的结果。而自然光的大量线偏振光中，象 A_1 ， A_2 这样对称分布的线偏振光总是成对出现，相应的交叉项也总是成对出现，相互抵消的。综上分析，取自自然光的 P_1 方向和 P_2 方向的两个总的垂直分量，投影到 P' 方向后，其宏观后果仍表现为非相干叠加。这就证明了自然光的两个垂直分量之间是没有稳定的位相关系的。

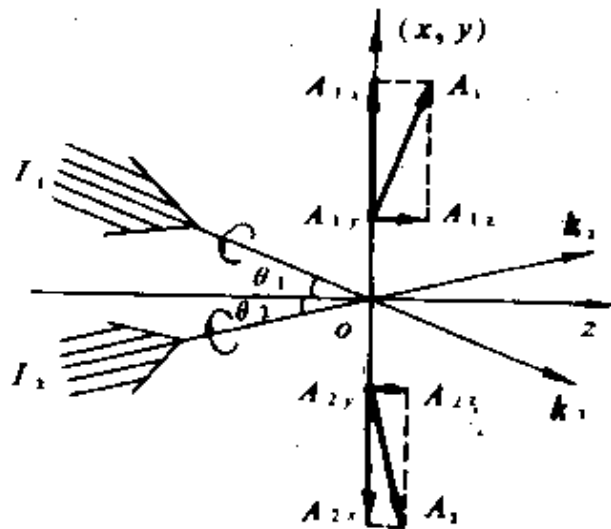
由上证明，也可看出，（3），（4）两问中未撤去 P 时，幕上能够得到干涉条纹，是因为投影到 P_1 ， P_2 方向上的正交分量来自于自然光中 P 方向的分量，再次投影到 P' 方向时，由投影引起的位相差之差为 π 的情况不复存在，从而交叉项不再成对出现，所以其宏观后果仍表现为相干叠加。

（6）此时， F_0 ， F_1 两点分别为位相差为 $0, 2\pi$ 的两个垂直振动的合成，合成结果为线偏振； F'' 点为位相差为 π 的两垂直振动的合成，结果也为线偏振，但振动方向与 F_0 ， F_1 点的振动方向正交； F' ， F''' 两点分别为位相差为 $\pi, 2, 3\pi/2$ 、大小相等的

两垂直振动的合成，结果都为圆偏振，一个左旋，一个右旋，到底哪个为左旋，哪个为右旋，取决于 P_1, P_2 的绝对取向。

*11. 试讨论两束同频左右旋圆偏振光的平行光的干涉（如图）。

解 如图，一束强度为 I_1 的左旋圆偏振光以 θ_1 倾角射向 xy 平面，另一束强度为 I_2 的同频右旋圆偏振光以 θ_2 倾角射向 xy 平面。为分析相干叠加问题，应对振动矢量作必要的分解，如图所示，将 A_1, A_2 分别分解为旋转矢量 $A_1 (A_{1x}, A_{1y}, A_{1z})$



题11图

和旋转矢量 $A_2 (A_{2x}, A_{2y}, A_{2z})$ 。显然 A_{1x} 与 A_{2x} 之间， A_{1y} 与 A_{2y} 之间， A_{1z} 与 A_{2z} 之间是完全满足相干条件的。为使问题逐步深入，在 θ_1, θ_2 很小的条件下可暂且忽略 z 分量的影响。在讨论 x, y 分量的叠加时，我们注意到对左旋平行光，自身有位相差

$$\varphi_{1y}(P) - \varphi_{1x}(P) = -\frac{\pi}{2}$$

对右旋平行光，自身有位相差

$$\varphi_{2y}(P) - \varphi_{2x}(P) = +\frac{\pi}{2}$$

当然两束平行光之间随场点 $P(x, y)$ 还有一个因光程差引起的位相差分布，设此位相差分布对 x 分量来说为

$$\delta_x(P) = \varphi_{2x}(P) - \varphi_{1x}(P)$$

而对 y 分量来说，必有

$$\delta_y(P) = \varphi_{2y}(P) - \varphi_{1y}(P)$$

$$= \delta_x(P) + \pi$$

于是两个分量的干涉强度分布分别为

$$I_x(P) = A_{1x}^2 + A_{2x}^2 + 2A_{1x}A_{2x}\cos\delta_x(P)$$

$$I_y(P) = A_{1y}^2 + A_{2y}^2 + 2A_{1y}A_{2y}\cos\delta_y(P)$$

$$= A_{1y}^2 + A_{2y}^2 - 2A_{1y}A_{2y}\cos\delta_x(P)$$

总的强度分布为两个正交方向强度的不相干叠加，即

$$I(P) = I_x(P) + I_y(P)$$

$$= (A_{1x}^2 + A_{1y}^2) + (A_{2x}^2 + A_{2y}^2)$$

$$+ 2(A_{1x}A_{2x} - A_{1y}A_{2y})\cos\delta_x(P)$$

在忽略 z 分量的情形下，有

$$(A_{1x}^2 + A_{1y}^2) = I_1, \quad (A_{2x}^2 + A_{2y}^2) = I_2$$

$$A_{1x} = A_{1y}, \quad A_{2x} = A_{2y}$$

$$A_{1x}A_{2x} - A_{1y}A_{2y} = 0$$

则

$$I(P) = I_1 + I_2$$

这表明两束同频左右旋圆偏振光的叠加，由于两个交叉项正好抵消，最终回到了非相干叠加的结果，幕上不出现亮暗条纹。

若考虑 z 分量的影响，则因矢量投影的方向性，有

$$\delta_z(P) = \delta_x(P) + \pi$$

$$I_x(P) = A_{1z}^2 + A_{2z}^2 + 2A_{1z}A_{2z}\cos\delta_z(P)$$

$$= A_{1z}^2 + A_{2z}^2 - 2A_{1z}A_{2z}\cos\delta_x(P)$$

以上所有振幅值满足

$$I_1 = 2A_1^2, \quad I_2 = 2A_2^2$$

$$A_{1x} = A_1\cos\theta_1, \quad A_{1y} = A_1, \quad A_{1z} = A_1\sin\theta_1$$

$$A_{2x} = A_2\cos\theta_2, \quad A_{2y} = A_2, \quad A_{2z} = A_2\sin\theta_2$$

于是总强度

$$I(P) = I_x(P) + I_y(P) + I_z(P)$$

$$= I_1 + I_2 + 2(A_1A_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - A_1A_2 - A_1A_2\sin\theta_1\sin\theta_2)\cos\delta_x(P)$$

$$= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1I_2} [\cos(\theta_1 + \theta_2) - 1] \cos\delta_x(P)$$

可见，交叉项依然保留，幕上出现一系列平行于 y 轴的直条纹，其反衬度为

$$\gamma = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\cos(\theta_1 + \theta_2) - 1|$$

当 $\theta_1 = -\theta_2$ ，即同方向入射时，则

$$\gamma = 0$$

$$I(P) = I_1 + I_2$$

当 $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ ，即两束光正交时，则

$$\gamma = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

$$I(P) = I_1 + I_2 - \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta_r(P)$$

当 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ ，即两束光对头碰时，则

$$\gamma = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

$$I(P) = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta_r(P)$$

§ 5 旋 光

1. 已知水晶对钠黄光的旋光率 $\alpha = 21.75^\circ \text{ mm}$ ，求左右旋圆偏振光折射率之差 Δn 。

解 由旋光率 α 与折射率差 Δn 之关系

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} \Delta n$$

得

$$\Delta n = \frac{\lambda \alpha}{\pi} = (5893 \times 10^{-7}) \times \frac{21.75}{180} \approx 7.121 \times 10^{-5}$$

2. 在两尼科耳棱镜之间插一块石英旋光晶片，以消除对眼睛最敏感的黄绿光 ($\lambda = 5500 \text{ \AA}$)，设对此波长的旋光率为 24° mm ，求下列情形下晶片的厚度：

(1) 两尼科耳棱镜主截面正交；

(2) 两尼科耳棱镜主截面平行。

解 (1) 当两尼科耳棱镜主截面正交时，为要消除黄绿色光，应使该波长的光在通过石英旋光晶片后，偏振面旋转 180° ，即

$$\psi = \alpha d = 180^\circ$$

得

$$d = \frac{\psi}{\alpha} = \frac{180}{24} = 7.5 \text{ mm}$$

即当晶片厚度为 7.5 mm 的整数倍时都可对此波长消光。

(2) 此时应满足

$$\psi = \alpha d = 90^\circ$$

得

$$d = \frac{\psi}{\alpha} = \frac{90}{24} = 3.75 \text{ mm}$$

即当晶片厚度为 3.75 mm 的奇数倍时都能对此波长消光。

3. 石英棒长 5.639 cm ，端面垂直于光轴，置于正交偏振器间，沿轴方向输入白光，用光谱仪观察透射光。

(1) 用一大张坐标纸，画出可见光范围（ 4000 到 7600 \AA ）偏振面的旋转角与波长的曲线，旋光率数据可查表得之；

(2) 从这曲线看，那些波长的光在光谱仪中消失？

(3) 在这些丢失的波长中，偏振面的最大和最小旋转角各是多少？

解 (1) 由公式 $\psi = \alpha d$ ，根据数据表提供的 $\alpha(\lambda)$ 数值得

$$\lambda = 3820 \text{ \AA}, \psi = 55.625 \times 5.639 \times 10 = 3137^\circ$$

$$\lambda = 4047 \text{ \AA}, \psi = 48.945 \times 5.639 \times 10 = 2760^\circ$$

$$\lambda = 4307 \text{ \AA}, \psi = 42.604 \times 5.639 \times 10 = 2402^\circ$$

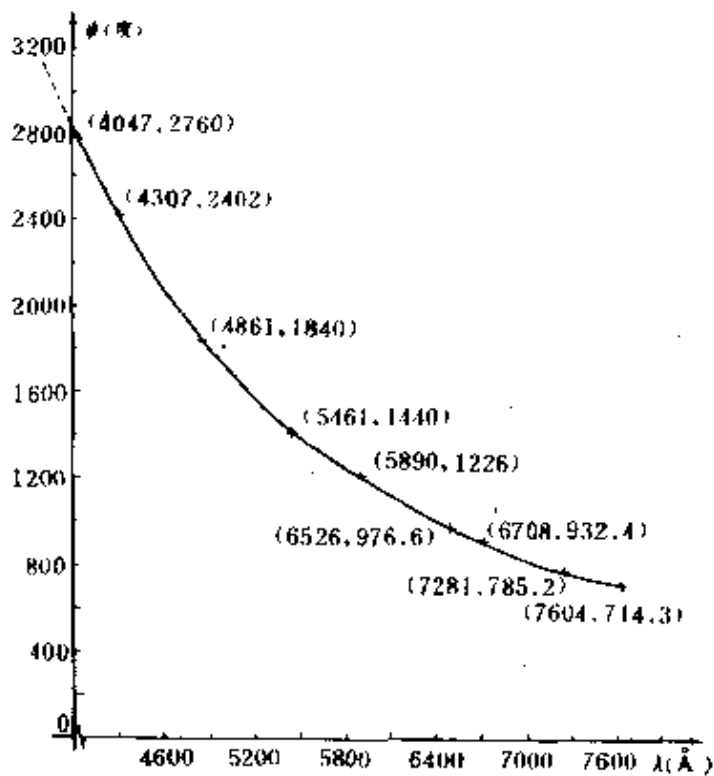
$$\lambda = 4861 \text{ \AA}, \psi = 32.773 \times 5.639 \times 10 = 1848^\circ$$

$$\lambda = 5461 \text{ \AA}, \psi = 25.538 \times 5.639 \times 10 = 1440^\circ$$

$$\lambda = 5890 \text{ \AA}, \psi = 21.749 \times 5.639 \times 10 = 1226^\circ$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 6562\text{\AA}, \psi = 17.318 \times 5.639 \times 10 = 976.6^\circ \\ \lambda &= 6708\text{\AA}, \psi = 16.535 \times 5.639 \times 10 = 932.4^\circ \\ \lambda &= 7281\text{\AA}, \psi = 13.921 \times 5.639 \times 10 = 785.2^\circ \\ \lambda &= 7604\text{\AA}, \psi = 12.668 \times 5.639 \times 10 = 714.3^\circ \end{aligned}$$

作 $\psi - \lambda$ 曲线如图。曲线表明偏振面的旋转角随波长的增加而减小，此为旋光色散。



题 3 图

(2) 因为石英棒置于正交偏振器之间，所以凡满足

$$\psi = k180^\circ \quad (k \text{ 为正整数})$$

的波长的光都将被第二个偏振器消光而在光谱仪中消失。在可见光范围内，这一系列波长的取值如下表。

ψ (度)	720	900	1080	1260	1440	1620
λ (Å)	7570	6790	6280	5830	5461	5140
ψ (度)	1800	1980	2160	2340	2520	2700
λ (Å)	4900	4660	4480	4360	4210	4150

(3) 在可见光范围内被丢失的波长中， $\lambda_m = 4150\text{\AA}$ 时，偏振面的旋转角最大，其值为 $\psi_m = 2700^\circ$ ； $\lambda_m = 6790\text{\AA}$ 时，偏振面的旋转角最小，其值为 $\psi_m = 900^\circ$ 。有意思的是

$$\frac{\psi_m}{\psi_m} \approx \frac{\lambda^2_m}{\lambda^2_m}$$

换句话说，旋光色散效应几乎与波长平方成反比，这是一定范围内近似成立的经验公式。

4. 一块表面垂直于光轴的水晶片恰好抵消 10 cm 长浓度为 20% 的麦芽糖溶液对钠光偏振面所引起的旋转。对此波长水晶的旋光率 $\alpha = 21.75^\circ/\text{mm}$ ，麦芽糖的旋光比率 $[\alpha] = 144^\circ/\text{dm} \cdot (\text{g}/\text{cm}^3)$ ，求此水晶片的厚度。

解 在麦芽糖溶液中偏振面的旋转角为

$$\psi_1 = [\alpha] N l$$

按题意此旋转角等于水晶片中所引起的旋转角

$$\psi_2 = \alpha d$$

由以上二式得此水晶片厚度应为

$$d = \frac{[\alpha] N l}{\alpha} = \frac{144 \times 0.20 \times 10 \times 10^{-1}}{21.75} = 1.32 \text{ mm}$$

5. 15 cm 长的左旋葡萄糖溶液使钠光的偏振面转了 25.6° ，已知 $[\alpha] = -51.4^\circ/\text{dm} \cdot (\text{g}/\text{cm}^3)$ ，求溶液浓度。

解 溶液浓度为

$$N = \frac{\psi}{[\alpha] l} = \frac{-25.6}{-51.4 \times 15 \times 10^{-1}} = 0.332 \text{ g}/\text{cm}^3$$

6. 将 14.50 g 的蔗糖溶于水，得到 60 cm³ 的溶液。在 15 cm 的量糖汁中测得钠光偏振面旋转角为向右 16.8° ，已知 $[\alpha] = 66.5^\circ/\text{dm} \cdot (\text{g}/\text{cm}^3)$ 。这蔗糖样品中有多少比例的非旋光性杂质？

解 蔗糖溶于水后的“粗”浓度为

$$N' = \frac{14.50}{60} = 0.242 \text{ g}/\text{cm}^3$$

由量糖计中测得的蔗糖的“净”浓度为

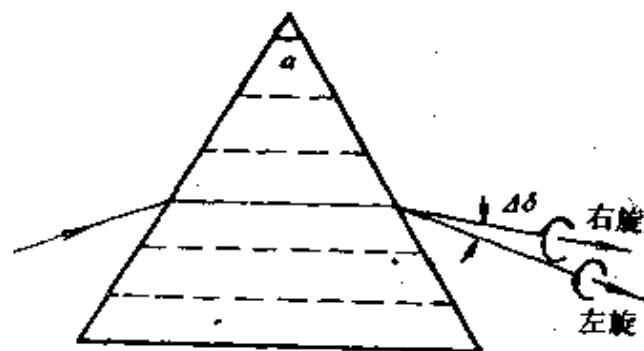
$$N = \frac{\psi}{[\alpha] l} = \frac{16.8}{66.5 \times 15 \times 10^{-1}} = 0.168 \text{ g/cm}^3$$

故此蔗糖含非旋光性杂质的比例为

$$\frac{N' - N}{N'} = \frac{0.242 - 0.168}{0.242} = 31\%$$

7. 钠光以最小偏向角条件射入顶角为 60° 的石英晶体棱镜，棱镜中光轴与底平行。求出射的左、右旋偏振光之间的夹角。

解 如图，所谓以“最小偏向角入射”意即选取合适的入射角，使光线经第一折射面后平行棱镜的底边。本题棱镜底边平行光轴，故光线在水晶棱镜内部沿光轴传播，它将被分解为左旋光和右旋光，折



题 7 图 右旋石英 $n_o < n_e$

射率分别为 n_L 和 n_R ，它们经第二折射面后就具有不同的偏向角 δ_L 和 δ_R 。考虑到在第二个折射面 R 光和 L 光的入射角近似于 $(90^\circ - 60^\circ) = 30^\circ$ ，应用折射定律有

$$n_R \sin 30^\circ = \sin i_R$$

$$n_L \sin 30^\circ = \sin i_L$$

得

$$\sin i_L - \sin i_R = \frac{1}{2}(n_L - n_R)$$

$$2 \sin\left(\frac{i_L - i_R}{2}\right) \cos\left(\frac{i_L + i_R}{2}\right) = -\frac{1}{2} \Delta n$$

其中

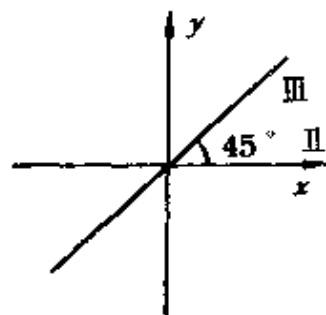
$$\sin\left(\frac{i_L - i_R}{2}\right) = \frac{1}{2}(i_L - i_R) = \frac{1}{2} \Delta \delta$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{i_I + i_R}{2}\right) &\approx \cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i} \\ &= \sqrt{1 - (n_o \sin 30^\circ)^2} \\ &= \sqrt{1 - (1.544 \times 0.5)^2} \approx 0.6356 \end{aligned}$$

Δn 取题 1 结果，即 $\Delta n \approx 7.121 \times 10^{-5}$ ，最后得到出射的两束左右旋圆偏振光传播方向之间的夹角为

$$\Delta\delta \approx \frac{\Delta n}{2 \cos i} \approx 5.6 \times 10^{-5} \text{ rad} \approx 12''$$

* 8. 有四个滤光器件：I 是各向同性的滤光片，使各种偏振态的光强都滤掉一半；II 和 III 都是线起偏器，透光方向分别为水平方向（x 轴）和 $+45^\circ$ （见附图），IV 是圆起偏器，它让右旋圆偏振光全部通过，把左旋圆偏振光全部吸收掉。把各滤光器件分别放在要研究的光路中，测量透射



题 8 图

出来的光强。设入射光强为 I_0 ，透过 I，II，III，IV 的光强分别为 I_1, I_2, I_3, I_4 ，斯托克斯引入下列四个参量来描述电磁波的偏振状态

$$\begin{aligned} S_0 &= 2I_1 \\ S_1 &= 2(I_2 - I_1) \\ S_2 &= 2(I_3 - I_1) \\ S_3 &= 2(I_4 - I_1) \end{aligned}$$

这便是斯托克斯参量的操作定义(Stokes, 1852年)。人们还常常把这些参量归一化，即用 I_0 除各参量，把得到的四个参数 $S_0/I_0, S_1/I_0, S_2/I_0, S_3/I_0$ 写成一组，用来描写入射光的偏振状态。例如对于自然光， $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_0/2$ ，故描述它的归一化斯

托克斯参量为 $(1, 0, 0, 0)$ 。写出下列偏振态的斯托克斯参量：

- (1) 水平 (x 方向) 线偏振, (2) 垂直 (y 方向) 线偏振,
 (3) $+45^\circ$ 线偏振, (4) -45° 线偏振, (5) 右旋圆偏振,
 (6) 左旋圆偏振, (7) 部分偏振, 极大在 x 方向, 偏振度 50%,
 (8) 部分偏振, 极大在 y 方向, 偏振度 50%。

解 (1) 对于水平 (x 方向) 线偏振, 有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = I_0 \\ I_3 = I_0 \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2} I_0 \end{cases} \quad \begin{cases} S_0 = 2I_1 = I_0 \\ S_1 = 2(I_2 - I_1) = I_0 \\ S_2 = 2(I_3 - I_1) = 0 \\ S_3 = 2(I_4 - I_1) = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为 $(1, 1, 0, 0)$ 。

(2) 对于垂直 (y 方向) 线偏振, 有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = 0 \\ I_3 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2} I_0 \end{cases} \quad \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = -I_0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为 $(1, -1, 0, 0)$ 。

(3) 对于 $+45^\circ$ 方向线偏振, 有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_3 = I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2} I_0 \end{cases} \quad \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = I_0 \\ S_3 = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为 $(1, 0, 1, 0)$ 。

(4) 对于 -45° 方向线偏振，有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = -\frac{1}{2} I_0 \\ I_3 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2} I_0 \end{cases} \quad \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = -I_0 \\ S_3 = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为 $(1, 0, -1, 0)$ 。

(5) 对于右旋圆偏振，有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_3 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_4 = I_0 \end{cases} \quad \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = I_0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为 $(1, 0, 0, 1)$ 。

(6) 对于左旋圆偏振，有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_3 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = 0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = -I_0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为 $(1, 0, 0, -1)$ 。

(7) 对于 $I_y = I_x$ ， $P = 50\%$ 的部分偏振光，

由

$$P = \frac{I_x - I_y}{I_x + I_y} = 0.5$$

$$I_x + I_y = I_0$$

得两垂直分量的强度分别为

$$I_x = \frac{3}{4} I_0, \quad I_y = \frac{1}{4} I_0$$

故有

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = \frac{3}{4} I_0 \\ I_3 = I_x \cos^2 45^\circ + I_y \cos^2 45^\circ = \frac{1}{2} I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2} I_x + \frac{1}{2} I_y = \frac{1}{2} I_0 \end{cases} \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为 $(1, \frac{1}{2}, 0, 0)$ 。

(8) 对于 $I_y = I_0$, $P = 50\%$ 的部分偏振光, 与 (7) 同理可得

$$I_x = \frac{1}{4} I_0, \quad I_y = \frac{3}{4} I_0$$

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_2 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_3 = \frac{1}{2} I_0 \\ I_4 = \frac{1}{2} I_0 \end{cases} \begin{cases} S_0 = I_0 \\ S_1 = -\frac{1}{2} I_0 \\ S_2 = 0 \\ S_3 = 0 \end{cases}$$

其归一化斯托克斯参量为 $(1, -\frac{1}{2}, 0, 0)$ 。

第八章 光的吸收、色散和散射

§ 1 光的吸收

1. 有一媒质，吸收系数 $\alpha = 0.32 \text{ cm}^{-1}$ ，当透射光强分别为入射光强的 10%，20%，50% 及 80% 时，媒质的厚度各为多少？注意，这里的入射光强与透射光强都已经考虑到媒质表面的反射，而成为体内两侧的光强。

解 由介质吸收的线性规律（布格尔定律）

$$I = I_0 e^{-\alpha l}$$

得

$$l = -\frac{1}{\alpha} \ln \frac{I}{I_0}$$

式中 l 为媒质的厚度。据此算出

$$\text{当 } I/I_0 = 10\% \text{ 时, } l = -\frac{1}{0.32} \ln 0.10 = 7.2 \text{ cm}$$

$$\text{当 } I/I_0 = 20\% \text{ 时, } l = 5.0 \text{ cm}$$

$$\text{当 } I/I_0 = 50\% \text{ 时, } l = 2.2 \text{ cm}$$

$$\text{当 } I/I_0 = 80\% \text{ 时, } l = 0.70 \text{ cm}$$

2. 一玻璃管长 3.50 m，内贮标准大气压下的某种气体。若这种气体在此条件下的吸收系数为 0.1650 m^{-1} ，求透射光强的百分比。

解 由布格尔定律得透射光强与入射光强的百分比为

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= e^{-\alpha l} = \exp [- (0.1650 \times 3.50)] \\ &= 56.1\% \end{aligned}$$

§ 2 色 散

• 1. 一块光学玻璃对水银灯蓝、绿谱线 4358 \AA 和 5461 \AA 的折射率分别为 1.65250 和 1.62450 ，用此数据定出科希公式中的 A 、 B 两常数，并用它计算此光学玻璃对钠黄线 5893 \AA 的折射率及色散率 $dn/d\lambda$ 。

解 将蓝、绿谱线的波长和折射率的数据分别代入科希公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

得联立方程

$$\begin{cases} 1.65250 = A + \frac{B}{(4358)^2} \\ 1.62450 = A + \frac{B}{(5461)^2} \end{cases}$$

解方程得

$$B = 1.464 \times 10^6 \quad (\text{\AA}^2)$$

$$A = 1.575$$

再将以上 A 、 B 值代入科希公式，得该光学玻璃对钠黄线 5893 \AA 的折射率为

$$\begin{aligned} n &= A + \frac{B}{\lambda^2} = 1.575 + \frac{1.464}{(5893)^2} \times 10^6 \\ &= 1.617 \end{aligned}$$

色散率为

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\lambda} &= -2B \frac{1}{\lambda^3} = (-2) \times 1.464 \times 10^6 \times \frac{1}{(5893)^3} \\ &= -1.431 \times 10^{-5} / \text{\AA} \end{aligned}$$

• 2. 冕玻璃K9折射率随波长变化的实验数据如附表所示。利用表内F、D、C三条谱线的折射率数据定出科希公式中

的 A, B, C 三个常数，用它计算表中给出的其它波长下折射率数据，并与表中实测数据比较。

附表 冕玻璃 K9 的色散

谱线代号		h	g	F	e
光色 波长(Å) 折射率 n	(紫外) 3650 1.53582	蓝 4047 1.52982	青 4358 1.52626	青绿 4861 1.52195	绿 5461 1.51829
谱线代号	D	C	A	—	
光色 波长(Å) 折射率 n	黄 5893 1.51630	橙红 6563 1.51389	红 7665 1.51104	(红外) 8630 1.50918	(红外) 9508 1.50778

解 把冕玻璃 K9 对 F, D, C 三条谱线的折射率数据分别代入科希公式

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}$$

得联立方程

$$\begin{cases} 1.52195 = A + \frac{B}{(4861)^2} + \frac{C}{(4861)^4} \\ 1.51630 = A + \frac{B}{(5893)^2} + \frac{C}{(5893)^4} \\ 1.51389 = A + \frac{B}{(6563)^2} + \frac{C}{(6563)^4} \end{cases}$$

用行列式法求解如下:

$$\Delta \begin{vmatrix} 1 & (4861)^{-2} & (4861)^{-4} \\ 1 & (5893)^{-2} & (5893)^{-4} \\ 1 & (6563)^{-2} & (6563)^{-4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4.2320 \times 10^{-8} & 1.7910 \times 10^{-15} \\ 1 & 2.8796 \times 10^{-8} & 8.2919 \times 10^{-16} \\ 1 & 2.3216 \times 10^{-8} & 5.3900 \times 10^{-16} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 10^{-24} \begin{vmatrix} 1 & 4.2320 & 17.910 \\ 1 & 2.8796 & 8.2919 \\ 1 & 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix} \\
&= 10^{-24} \left(\begin{vmatrix} 2.8796 & 8.2919 \\ 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4.2320 & 17.910 \\ 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{vmatrix} 4.2320 & 17.910 \\ 2.8796 & 8.2919 \end{vmatrix} \right) \\
&= 10^{-24} (-3.7294 + 18.769 - 16.482) \\
&= -1.4424 \times 10^{-24} \\
\Delta_A &= 10^{-24} \begin{vmatrix} 1.52195 & 4.2320 & 17.910 \\ 1.51630 & 2.8796 & 8.2919 \\ 1.51389 & 2.3216 & 5.3900 \end{vmatrix} \\
&= -2.169 \times 10^{-24} \\
\Delta_B &= 10^{-12} \begin{vmatrix} 1 & 1.52195 & 17.910 \\ 1 & 1.51630 & 8.2919 \\ 1 & 1.51389 & 5.3900 \end{vmatrix} \\
&= -6.4 \times 10^{-12} \\
\Delta_C &= 10^{-8} \begin{vmatrix} 1 & 4.2320 & 1.52195 \\ 1 & 2.8796 & 1.51630 \\ 1 & 2.3216 & 1.51389 \end{vmatrix} \\
&= 2.0 \times 10^{-12}
\end{aligned}$$

由此算出

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} = 1.504$$

$$B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = 4.437 \times 10^5 \text{ (}\overset{\circ}{\text{A}}^2\text{)}$$

$$C = \frac{\Delta_C}{\Delta} = -1.387 \times 10^{12} \text{ (}\overset{\circ}{\text{A}}^4\text{)}$$

再由以上 A , B , C 值计算出冕玻璃对其它谱线的折射率为

紫外 (3650 Å)

$$\begin{aligned} n &= 1.504 + \frac{4.437 \times 10^5}{(3650)^2} + \frac{1.387 \times 10^{12}}{(3650)^4} \\ &= 1.504 + 3.3305 \times 10^{-2} + 7.8146 \times 10^{-4} \\ &= 1.529 \end{aligned}$$

h 线 (4047 Å) $n = 1.526$

g 线 (4358 Å) $n = 1.523$

e 线 (5461 Å) $n = 1.517$

A' 线 (7665 Å) $n = 1.511$

红外 (8630 Å) $n = 1.510$

红外 (9508 Å) $n = 1.509$

上列谱线折射率的计算数值和附表中给出的实测数据，都表明折射率 n 随波长 λ 的增加而下降（正常色散）。但在可见光波段，计算值比实验值偏小。

* 3. 一棱镜顶角 $\alpha = 50^\circ$ ，设它的玻璃材料色散性质可用二常数科希公式来描写，二常数分别为 $A = 1.53974$ ， $B = 4.6528 \times 10^5 \text{ Å}^2$ 。求此棱镜对波长 5500 Å 光波调到最小偏向角时的色散本领。

解 工作于最小偏向角条件下的棱镜的角色散本领为

$$D_\theta = \frac{d\delta_m}{d\lambda} = \frac{2 \sin(\alpha/2)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\alpha/2)}} \frac{dn}{d\lambda}$$

由科希公式 $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ ，我们可算出该棱镜材料对波长 5500 Å 光波的折射率和色散率分别为

$$n = 1.53974 + \frac{4.6528 \times 10^5}{(5500)^2} \approx 1.55512$$

$$\frac{dn}{d\lambda} = -2 \frac{B}{\lambda^3} \approx -5.593 \times 10^{-6} / \text{Å}$$

将上述数值及 α 值代入角色散本领公式得

$$\begin{aligned} D_{\theta} &\approx 6.2723 \times 10^{-6} \text{ rad} / \text{\AA} \\ &\approx 1.29'' / \text{\AA} \end{aligned}$$

证明吸收峰的高度反比于 ν ，半值宽度 $\Delta\lambda$ 正比于 ν 。

证 物质的吸收值可由 $2n^2\kappa$ 量描述，其中 κ 称为衰减指数，它与（宏观）吸收系数有正比关系。根据经典色散理论导出 $2n^2\kappa$ 具有以下函数形式

$$2n^2\kappa = \alpha \frac{\gamma \lambda_0^3 \lambda^3}{b(\lambda^2 - \lambda_0^2)^2 + \gamma^2 \lambda_0^3 \lambda^2}$$

在阻尼常数如 γ 很小条件下，其极值（即吸收峰位置）发生在 $\lambda \approx \lambda_0$ 处，即发生在外来光波长 λ 与物质本征谱线 λ_0 相近的情况。此时，吸收峰高度值为

$$(2n^2\kappa)_m \approx \frac{a\lambda_0}{\gamma} \approx \frac{1}{\gamma}$$

为求吸收峰的半值宽度，令 $\lambda = \lambda_0 \pm \Delta\lambda/2$ ，且满足下式

$$a \frac{\gamma \lambda_0^3 (\lambda_0 \pm \frac{\Delta\lambda}{2})^3}{b [(\lambda_0 \pm \frac{\Delta\lambda}{2})^2 - \lambda_0^2]^2 + \gamma^2 \lambda_0^3 (\lambda_0 \pm \frac{\Delta\lambda}{2})^2} = \frac{1}{2} \frac{a\lambda_0}{\gamma}$$

在展开式中忽略高阶小量 $(\Delta\lambda)^3$ 、 $(\Delta\lambda)^4$ ，得方程

$$\begin{aligned} 2\gamma^2 \lambda_0^3 + \gamma^2 \lambda_0^3 \Delta\lambda + \frac{3}{2} \gamma^2 \lambda_0^3 (\Delta\lambda)^2 \\ = (b + \frac{1}{4} \gamma^2 \lambda_0^3) (\Delta\lambda)^2 + \gamma^2 \lambda_0^3 \Delta\lambda + \gamma^2 \lambda_0^3 \end{aligned}$$

经整理，最后解出吸收峰的半值宽度为

$$\Delta\lambda = \frac{\gamma\lambda_0}{\sqrt{b}} - \frac{\gamma\lambda_0}{\sqrt{b} + \frac{\gamma\lambda_0}{\lambda_0}} = \frac{\gamma\lambda_0}{\sqrt{b}}$$

· 4 . 一块玻璃对波长为 0.70 \AA 的 X 射线的折射率比 1 小 1.600×10^{-6} . 求 X 射线能在此玻璃外表面发生全反射的最大掠射角

解 X 射线在玻璃外表面发生全反射时的临界角 i_c 对应最大的掠射角 $\alpha_m = 90^\circ - i_c$, 而临界角应满足

$$\sin i_c = n = 1 - 1.600 \times 10^{-6}$$

故得

$$i_c = 89.8975^\circ$$

$$\alpha_m = 6.150^\circ$$

· 5 . 估计一下铜的等离子体振荡圆频率 ω_p 的数量级

解 根据经典色散理论, 等离子体振荡圆频率值为

$$\omega_p = \sqrt{NZe^2 / (\epsilon_0 m)}$$

其意义在于: 当入射光频 ω 如此之高, 以至远大于某媒质的所有共振频率时, 该媒质的折射率将小于 1, 由

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

给出 查算出铜原子的质量为

$$M = \frac{\text{铜的原子量}}{\text{阿伏伽德罗常数}} = \frac{63.54 \times 10^{-3}}{6.02 \times 10^{23}}$$

$$\approx 1.055 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

原子数密度为

$$N = \frac{\text{铜的密度}}{M} = \frac{8940}{1.055 \times 10^{-25}}$$

$$\approx 8.474 \times 10^{28} / \text{m}^3$$

真空介电常数为

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ 库仑}^2 / \text{牛顿} \cdot \text{米}^2$$

电子质量为

$$m = 9.200 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

电子电荷为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ 库仑}$$

在经典色散理论中，等离子体振荡频率公式中的 Z 值取多少较为合理？铜的原子序数为 29，即原子核外围共有 29 个电子分几个壳层分布，其中内层电子被原子核紧密束缚，同原子核一起组成原子实（正离子）；外层电子被束缚得较弱，在比紫外光频高得多的外来光作用下，这些电子的状态与最外层的那一个称之为价电子（或自由电子）的状态相似，它们都成为自由电子。因此，取 $Z \gg 1$ 是合理的，究竟取多少在这里不便说得太死，本来经典色散理论就是一种唯象理论。 Z 的确切数值也许要由别的理论途径和实验手段来断定。暂且取 $Z = 3$ ，以示此意，在数量级上是没有问题的。最后算出铜的等离子体振荡的圆频率（量级）为

$$\omega_p \approx 3 \times 10^{16} \text{ Hz}$$

它比紫外光频 $\omega_0 \approx 10^{15} \text{ Hz}$ 高一个量级以上。

§ 3 群 速

* 1. 求冕玻璃 K9 对 D 双线的群速。

解 小色散时群速 v_g 与相速 v_p 的关系为

$$v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda} = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right)$$

式中波长 λ 皆指介质波长，鉴于式中要用到材料色散率 $dn/d\lambda$ ，而科希色散公式中的 λ 是指真空波长 λ_0 ，因此用科希公式求出色散率 $dn/d\lambda_0$ ，后还需换算成 $dn/d\lambda$ 。这就要导出 $dn/d\lambda$ 与 $dn/d\lambda_0$ 的关系，推导如下：

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\lambda} &= \frac{dn}{d\lambda_0} \frac{d\lambda_0}{d\lambda} = \frac{dn}{d\lambda_0} \frac{d(n\lambda)}{d\lambda} \\ &= \frac{dn}{d\lambda_0} \left(n + \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right) \\ &\approx n \frac{dn}{d\lambda_0} \end{aligned}$$

这样， v_g 公式就可以改写成

$$v_g = \frac{c}{n} \left(1 + \lambda \frac{dn}{d\lambda_0} \right) = \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0} \right)$$

上式中折射率 n 取双线平均折射率 $\bar{n} = 1.51630$ ； m 线在真空中的光波长 λ_0 取双线平均波长 $\bar{\lambda} = 5893 \text{ \AA}$ ；剩下的问题就是计算该材料的色散率 $dn/d\lambda_0$ 。按科希公式 $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2} + \frac{c}{\lambda_0^4}$ 求得

$$\frac{dn}{d\lambda_0} = -2 \frac{B}{\lambda_0^3} - 4 \frac{c}{\lambda_0^5} \quad (b)$$

系数 B 、 c 数值由 § 2 题 2 给出

$$B = 4.437 \times 10^5 \text{ \AA}^2$$

$$c = -1.387 \times 10^{12} \text{ \AA}^4$$

将 B 、 c 值代入式(b)算出

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\lambda_0} &\approx -4.336 \times 10^{-6} \text{ \AA}^{-1} + 7.806 \times 10^{-7} \text{ \AA}^{-1} \\ &\approx -3.555 \times 10^{-6} / \text{ \AA} \end{aligned}$$

再代入改写后的 v_g 公式算出群速

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{3 \times 10^8}{1.5163} \left(1 - \frac{5893}{1.5163} \times 3.555 \times 10^{-6} \right) \text{ m/s} \\ &\approx 1.979 \times 10^8 (1 - 0.0138) \text{ m/s} \\ &\approx 1.952 \times 10^8 \text{ m/s} \end{aligned}$$

并可算得

$$\frac{v_e - v_g}{v_g} \approx \frac{1.979 - 1.952}{1.979} = 1.4\%$$

· 2. 试计算下列各情况下的群速：

(1) $v_p = v_0$ (常数) (无色散媒质，如空气中的声波)：

(2) $v_p = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} \left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho} \right)}$ (水面波， g 为重力加速度， T 为表面张力， ρ 为液体的密度)：

(3) $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ (正常色散媒质中光波的科希公式)：

(4) $\omega^2 = \omega_c^2 + c^2 k^2$ (波导中的电磁波， ω_c 为截止圆频率)。

解 (1) 对无色散媒质来说

$$\frac{dv_p}{d\lambda} = 0$$

则群速与相速相等

$$v_g = v_p = v_0$$

(2) 对于水面波

$$\begin{aligned} \frac{dv_p}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} \left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho} \right)} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} \left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho} \right)}} \left(\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi T}{\lambda^3 \rho} \right) \end{aligned}$$

所以群速为

$$v_g = v_p = \lambda \frac{dv_p}{d\lambda}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} \left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho} \right)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi} \left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho} \right)}} \left(\frac{\lambda g}{2\pi} - \frac{2\pi T}{\lambda \rho} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \left(g + 3 \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} \left(g + \frac{4\pi^2 T}{\lambda^2 \rho} \right) \end{aligned}$$

(3) 由科希公式得

$$\frac{dn}{d\lambda_0} = \frac{2B}{\lambda_0^3}$$

式中 λ_0 为真空中光波长。由本节题 1 式 (a)，有

$$\frac{dn}{d\lambda} \approx n \frac{dn}{d\lambda_0}$$

所以正常色散媒质中群速为

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda}{n} \frac{dn}{d\lambda} \right) \approx \frac{c}{n} \left(1 + \frac{\lambda_0}{n} \frac{dn}{d\lambda_0} \right) \\ &= \frac{c}{n} \left(1 - \frac{2B}{n\lambda_0^3} \right) = \frac{c}{n} \left(1 - \frac{2B}{n^2 \lambda^2} \right) \end{aligned}$$

式中 $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$ ， c 为真空中光速， λ 为媒质中波长。可见正常色散媒质中群速小于相速。

(4) 波导中的电磁波群速为

$$\begin{aligned} u_g &= \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} (\omega_0^2 + c^2 k^2)^{1/2} \\ &= 2ck \end{aligned}$$

本题在求上列四种情况下的群速时，对于不同的色散关系 $\omega = \omega(k)$ ， $n = n(\lambda)$ ， $\omega = \omega(k)$ 分别采用了三个不同形式的群速公式。这三个群速公式都是瑞利的群速公式的不同表示。

§ 4 光的散射

1. 摄影者知道用橙黄色滤色镜拍摄天空时，可增加蓝天和白云的对比。设照相机镜头和底片的灵敏度将光谱范围限制在 3900 到 6200 Å 之间，并设太阳光谱在此范围内可以看成是常数。若滤色镜把波长在 5000 Å 以下的光全部吸收，天空的散射光被它去掉了百分之几？

解 橙黄色波长约为 6000 Å。橙黄色滤光镜对于长波 (6000 Å

以上)的透过率较大,而对于短波(6000 Å以下)的吸收率较大。白光经此滤色镜后,长波成分就显著增加,而短波成分将大大削减,于是蓝天(背景)在底片上的照度很低,白云在照相底片上的照度相对较高,综合结果势必增加底片上蓝天与白云的反差。为估算数量级,设滤色镜的滤光性能如题意,3900到6200 Å之间的散射光强为 I_0 ,3900到5500 Å的散射光强为 I' ,则滤色镜吸收光强的百分比为

$$\frac{I'}{I_0} = \frac{5500 - 3900}{6200 - 3900} = 70\%$$

• 2. 苯(C_6H_6)的喇曼散射中较强的谱线与入射光的波数差为607, 992, 1178, 1586, 3047, 3062 cm^{-1} 。今以氩离子激光($\lambda = 4880 \text{ Å}$)入射,计算各斯托克斯和反斯托克斯谱线的波长。

解 已知入射波光长为 $\lambda_0 = 4880 \text{ Å}$,则其波数为

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{4880 \times 10^{-8}} = 20491.8 \text{ cm}^{-1}$$

又已知喇曼散射与入射光的波数差 $\frac{1}{\lambda_j}$ 为

$$\frac{1}{\lambda_1} = 607 \text{ cm}^{-1} \quad \frac{1}{\lambda_2} = 992 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = 1178 \text{ cm}^{-1} \quad \frac{1}{\lambda_4} = 1586 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda_5} = 3047 \text{ cm}^{-1} \quad \frac{1}{\lambda_6} = 3062 \text{ cm}^{-1}$$

斯托克斯谱线(长波线)的波数 $1/\lambda_j = (1/\lambda_0) - (1/\lambda_j)$,代入数据得

$$\frac{1}{\lambda_1} = 19884.8 \text{ cm}^{-1} \quad \frac{1}{\lambda_2} = 19499.8 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda'_1} = 19313.8 \text{ cm}^{-1} \quad \frac{1}{\lambda'_4} = 18905.8 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda'_5} = 17444.8 \text{ cm}^{-1} \quad \frac{1}{\lambda'_6} = 17429.8 \text{ cm}^{-1}$$

反斯托克斯谱线（短波线）的波数 $1/\lambda'' = (1/\lambda_0) + (1/\lambda')$

代入数据得

$$\frac{1}{\lambda''_1} = 21098.8 \text{ cm}^{-1} \quad \frac{1}{\lambda''_2} = 21483.8 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda''_3} = 21669.8 \text{ cm}^{-1} \quad \frac{1}{\lambda''_4} = 22077.8 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{1}{\lambda''_5} = 23538.8 \text{ cm}^{-1} \quad \frac{1}{\lambda''_6} = 23553.8 \text{ cm}^{-1}$$

因此各斯托克斯谱线的波长 λ'_i 分别为

$$\lambda'_1 = 5029.0 \text{ \AA} \quad \lambda'_2 = 5128.3 \text{ \AA}$$

$$\lambda'_3 = 5177.6 \text{ \AA} \quad \lambda'_4 = 5289.4 \text{ \AA}$$

$$\lambda'_5 = 5732.4 \text{ \AA} \quad \lambda'_6 = 5737.3 \text{ \AA}$$

各反斯托克斯谱线的波长 λ''_i 分别为

$$\lambda''_1 = 4739.6 \text{ \AA} \quad \lambda''_2 = 4654.7 \text{ \AA}$$

$$\lambda''_3 = 4614.7 \text{ \AA} \quad \lambda''_4 = 4529.4 \text{ \AA}$$

$$\lambda''_5 = 4248.3 \text{ \AA} \quad \lambda''_6 = 4245.6 \text{ \AA}$$

第九章 光的量子性

§ 1 热辐射

* 1. 一空腔辐射器的内外器壁一样，在某温度 T 时材料（单次）辐射亮度为 $b(\nu, T)$ ，吸收本领为 $a(\nu, T)$ 。设器壁是理想的漫射体（即朗伯体）。证明：

(1) 由于多次反射，腔内任何面元上的辐射照度 $e_0(\nu, T)$ 和辐照亮度 $b_0(\nu, T)$ 分别为

$$\begin{cases} e_0(\nu, T) = \frac{\pi b(\nu, T)}{a(\nu, T)} \\ b_0(\nu, T) = \frac{b(\nu, T)}{a(\nu, T)} \end{cases}$$

(2) 小孔处辐射场的亮度也为上式所决定的 $b_0(\nu, T)$ ，它比外器壁的亮度 $b(\nu, T)$ 大 $1/a(\nu, T)$ 倍

[提示：首先证明，不管空腔形状如何，内器壁接收第 n 次反射光的照度 $e_n(\nu, T)$ 与第 $n, n+1$ 次反射光的亮度 $b_n(\nu, T)$ 、 $b_{n+1}(\nu, T)$ 有如下关系（可参考第一章 §11 习题 3 的作法）：

$$e_n(\nu, T) = \pi b_n(\nu, T),$$

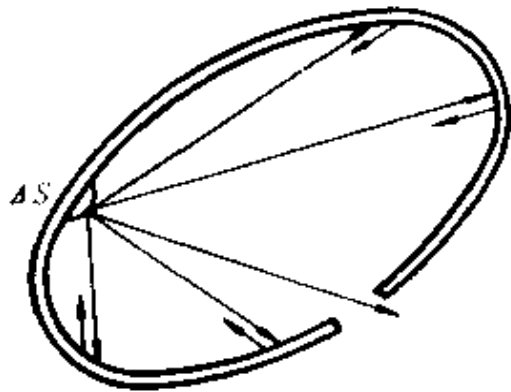
$$b_{n+1}(\nu, T) = \frac{e_n(\nu, T)}{\pi} \frac{1}{1 - a(\nu, T)},$$

而

$$e_0(\nu, T) = \sum_n e_n(\nu, T), \quad b_0(\nu, T) = \sum_n b_n(\nu, T)$$

证 处理这类问题首先从概念上要明确两点。其一，辐射亮度 $b(\nu, T)$ 和吸收本领 $a(\nu, T)$ 是反映物质（材料）辐射的

内在特性，它们与环境没有关系，而辐射照度 $e_n(\nu, T)$ 和 辐照亮度（反射光亮度） $b_n(\nu, T)$ 是反映器件辐射的表现特性，它们与环境是有关系的。其二，处在空腔辐射器壁上的任一面元，具有双重性，一方面它是辐射源，向其它面元辐射能量；另一方面，它又接收来自其它面元的辐照（如图），这种相互作用过程是彼此交织无数次往返，以至整个空腔形成一个热平衡辐射器。



题1图

(1) 考察任一面元 ΔS ，设其中第 n 次（所有面元）的亮度为 b_n ，由光度学中的互易关系知道，来自其它面元而落在该面元上的辐射照度为

$$e_n = \pi b_n \quad (a)$$

经吸收后，其面辐射度（即辐射本领）就成为 $e_n(1 - a)$ ，它决定了下一次该面元的辐射亮度为

$$b_{n+1} = \frac{e_n(1 - a)}{\pi}$$

由以上两式得

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = (1 - a) \quad (b)$$

可见多次反射的辐照亮度 b_1, b_2, \dots 构成了一个等比级数，其和便是空腔辐射器壁上任一面元的亮度

$$b_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_i = b_1 \frac{1}{1 - (1 - a)} = \frac{b_1}{a}$$

若初始亮度 b_1 取为材料（本底）的辐射亮度 b ，则

$$b_n = \frac{b}{a}$$

多次反射而来的辐照度 e_1, e_2, \dots 也构成一个等比级数，其和便是空腔辐射器壁上任一面元的辐照度

$$e_0 = \sum_n e_n = \pi \sum b_n = \pi b_0 \\ = \frac{\pi b}{a}$$

(2) 小孔面元被腔壁其它所有亮度为 b_0 的面元辐照，照度为 πb_0 ，因小孔并无吸收，且对外辐射特性仍为朗伯体，故其亮度为

$$b'_0 = \frac{\text{辐射本领}}{\pi} = \frac{\text{辐照度}}{\pi} = \frac{\pi b_0}{\pi} \\ = b_0$$

它与外器壁（材料）的辐射亮度之比为

$$\frac{b'_0}{b} = \frac{b_0}{b} = \frac{1}{a}$$

可见，器壁吸收系数越小（白体），则比值越大。如果器壁材料本身就是绝对黑体， $a = 1$ ，则 $b'_0 = b$ ，这说明在器壁面元之间完全没有反射（辐照）的条件下，小孔对外的辐射亮度并不等于零，而等于材料的辐射亮度。这也补充说明了，以上对 b_0 、 b'_0 的计算公式中已经包含了材料的辐射亮度 b ，还加上了来自周围的辐照引起的亮度（反射亮度），因此统称 b_0 或 b'_0 为“亮度”也许更妥当一些，或者称 b_0 或 b'_0 为器件的辐射亮度，以区别于材料的辐射亮度。器件的辐射亮度由材料的辐射亮度和环境的辐照亮度两部分组成。

2. 太阳常数（太阳在单位时间内垂直照射在地球表面单位面积上的能量）为 $1.94 \text{ cal/cm}^2 \cdot \text{min}$ ，日地距离约为 $1.50 \times 10^8 \text{ km}$ ，太阳直径约为 $1.39 \times 10^6 \text{ km}$ ，用这些数据来估算一下太阳的温度。

解一 本题最简单的处理就是根据太阳光的球对称性，由地

面照度 e 算出太阳光球的总辐射通量（总辐射功率） Ψ ，再除以太阳光球的总面积 S 得太阳的面辐射度（辐射本领） R ，最后由黑体辐射的斯特藩—玻耳兹曼定律估算太阳温度（辐射温度） T 。具体计算如下：设日地距离为 r_1 ，太阳光球半径为 r_2 ，则

$$\Psi = 4\pi r_2^2 e$$

$$R = \frac{\Psi}{S} = \frac{4\pi r_2^2 e}{4\pi r_1^2} = e \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

$$T = \sqrt[4]{\frac{R}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{e}{\sigma} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2}$$

取 $e = 1.94 \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{min}^{-1} = 1352 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ，
 $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
 $r_1 = 1.50 \times 10^8 \text{ km}$ ， $r_2 = 6.95 \times 10^3 \text{ km}$

代入上式算得

$$T \approx 5773 \text{ K}$$

实际上太阳并非绝对黑体，因此其表面实际温度比 5773 K 要高，才能有与黑体同样大的辐射本领。

解二 设太阳的辐射亮度为 b ，把太阳看成余弦发射体，则

$$R = \pi b$$

b 与地面照度 e 的关系为

$$e = \Omega b$$

式中 Ω 为太阳对被照地点所张立体角

$$\Omega = \frac{\pi r_2^2}{r_1^2}$$

故太阳的辐射本领为

$$R = e \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

由斯特藩—玻耳兹曼定律得太阳温度

$$T = \sqrt{\frac{R}{\delta}} = \sqrt{\frac{e}{\delta} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2} = 5773 \text{ K}$$

3. 设空腔处于某温度时 $\lambda_{01} = 6500 \text{ \AA}$ ，如果腔壁的温度增加，以至总辐射本领加倍时， λ_{01} 变为多少？

解 设增加后的空腔温度为 T' ，相应的总辐射本领为 R' ，辐射峰值位置为 λ_{01}' ，则由斯特藩-玻耳兹曼（四次方）定律得

$$\frac{R'}{R} = \left(\frac{T'}{T}\right)^4 = 2,$$

由维恩位移（反比）定律得

$$\frac{\lambda_{01}'}{\lambda_{01}} = \frac{T}{T'}$$

于是

$$\begin{aligned} \lambda_{01}' &= \left(\frac{T}{T'}\right) \lambda_{01} = \sqrt[4]{\frac{R}{R'}} \lambda_{01}, \\ &= \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \times 6500 \text{ \AA} \approx 5166 \text{ \AA}. \end{aligned}$$

4. 热核爆炸中火球的瞬时温度达 10^7 K ，

(1) 估算辐射最强的波长；

(2) 这种波长的能量子 $h\nu$ 是多少？

解 (1) 作黑体近似，按维恩位移（反比）定律，得火球辐射峰的波长为

$$\lambda_{01} = \frac{b}{T} = \frac{0.288}{10^7} \text{ cm} = 2.88 \text{ \AA}$$

这属于 X 射线波段。

(2) 其能量子值为

$$\varepsilon_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$= \frac{(6.626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)}{2.88 \times 10^{-19}} \text{ J}$$

$$\approx 69 \times 10^{-17} \text{ J} = \frac{69 \times 10^{-17}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ eV}$$

$$\approx 4313 \text{ eV}$$

* 5. 利用普朗克公式证明斯特藩-玻耳兹曼常数为

$$\sigma = (2\pi^5 k^4 / 15 c^2 h^3)$$

[提示: $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$]

证 黑体的总辐射本领为

$$R = \int_0^{\infty} r_{\nu}(\nu, T) d\nu$$

$$= \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu$$

令 $x = h\nu/kT$, 改写上式为

$$R = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

$$= \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \frac{\pi^4}{15}$$

$$= \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} T^4$$

即

$$R = \sigma T^4$$

式中斯特藩-玻耳兹曼常数为

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} \approx 5.65 \times 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \cdot \text{K}^4}$$

* 6. 利用普朗克公式证明维恩常数为

$$b = 0.2014 hc/k$$

[提示: $e^{-x} + x/5 = 1$ 的解为 $x = 4.965$]

证 为求辐射峰值位置 λ_M , 我们将普朗克公式

$$r_0(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right) - 1}$$

对波长 λ 求导得

$$\frac{dr_0}{d\lambda} = -2\pi hc^2 \frac{[5\lambda^4 (e^{(hc)/(kT\lambda)} - 1) + \lambda^5 e^{(hc)/(kT\lambda)} \left(-\frac{hc}{kT} \frac{1}{\lambda^2}\right)]}{[\lambda^5 (e^{(hc)/(kT\lambda)} - 1)]^2}$$

令 $\frac{dr_0}{d\lambda} = 0$, 得方程

$$\left[1 - \exp\left(-\frac{hc}{kT\lambda}\right)\right] - \frac{1}{5} \frac{hc}{kT\lambda} = 0$$

令 $\frac{hc}{kT\lambda} = x$, 解方程

$$e^{-x} + \frac{1}{5}x - 1 = 0$$

得

$$x_M = 4.965$$

即

$$\lambda_M T = \frac{hc}{kx_M} = 0.2014 \frac{hc}{k}$$

写成

$$\lambda_M T = b$$

式中维恩常数

$$b = 0.2014 \frac{hc}{k} \approx 0.290 \text{ cm} \cdot \text{K}$$

§ 2 光的粒子性和波粒二象性

1. 从钠中取去一个电子所需的能量为 2.3 eV ，试求从钠表面光电发射的截止波长为多少？钠是否会对 $\lambda = 6800\text{ \AA}$ 的橙黄色光表现出光电效应？

解 由钠的电子脱出功 A 值给出钠发生光电效应的截止（红限）频率 ν_0 或红限波长 λ_0 为

$$\begin{aligned}\nu_0 &= \frac{A}{h} \\ \lambda_0 &= \frac{c}{\nu_0} = \frac{ch}{A} \\ &= \frac{(3 \times 10^{10}) \times (6.626 \times 10^{-34})}{2.3 \times (1.602 \times 10^{-19})} \text{ cm} \\ &\approx 5.395 \times 10^{-5} \text{ cm} = 5395\text{ \AA}\end{aligned}$$

可见，钠对 $\lambda = 6800\text{ \AA}$ 的光波不能表现出光电效应。

2. 波长为 2000 \AA 的光照到铝表面，对铝来说，移去一个电子所需的能量为 4.2 eV ，试问：

- (1) 出射的最快光电子的能量是多少？
- (2) 遏止电压为多少？
- (3) 铝的截止波长为多少？
- (4) 如果入射光强度为 2.0 W/m^2 ，单位时间打到单位面积上的平均光子数为多少？

解 波长 $\lambda = 2000\text{ \AA}$ 的光子能量为

$$\begin{aligned}E &= h\nu = \frac{hc}{\lambda} \\ &= \frac{(6.626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^{10})}{(2 \times 10^{-5}) \times (1.602 \times 10^{-19})} \text{ eV}\end{aligned}$$

$$\approx 6.2 \text{ eV}$$

(1) 出射的最快光电子的能量为

$$W_{\text{max}} = h\nu - A = 6.2 - 4.2 \\ = 2.0 \text{ eV}$$

(2) 遏止电压为2.0 V

(3) 铝的截止波长(红限)为

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A} = \frac{E}{A} \lambda \\ = \frac{6.2}{4.2} \cdot 2000 \text{ \AA} \approx 2952 \text{ \AA}$$

(4) 光强 I 与光子流平均密度 N 的关系为

$$I = N h \nu$$

故

$$N = \frac{I}{h\nu} = \frac{2.0}{6.2 \times 1.6 \times 10^{-19}} (\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}) \\ \approx 2.0 \times 10^{18} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$$

例 3. 某光电阴极对于 $\lambda = 1910 \text{ \AA}$ 的光，发射光电子的遏止电压为0.71 V。当改变入射光波长时，其遏止电压变为1.43 V，今问此对应的入射光波长为多少？

解 光电效应的遏止电压 V_0 与光电阴极的脱出功 A 以及入射光频 ν (或波长 λ) 的关系为

$$eV_0 = h\nu - A, \text{ 或 } eV_0 = \frac{hc}{\lambda} - A \quad (a)$$

对于另一入射光频 ν' 或 (波长 λ')，有

$$eV'_0 = h\nu' - A, \text{ 或 } eV'_0 = \frac{hc}{\lambda'} - A \quad (b)$$

式(b)减去式(a)得

$$eV_0' - eV_0 = hc \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

解出

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{e(V_0' - V_0)}{hc} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{(1.6 \times 10^{-19}) \times (1.43 - 0.71)}{(6.63 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)} + \frac{1}{4910}$$

$$\approx 0.2616 \times 10^{-7} (\text{\AA})^{-1}$$

故 $\lambda' \approx 3823 \text{ \AA}$

即遏止电压增加到1.43V时，对应的入射光波长减小到3823 \text{ \AA}。

4. 有光照射到照相底板上，如果在板上分解出 AgBr 分子，则光被记录下来。分解一个 AgBr 分子所需的最小能量约为 10^{-18} J ，求截止波长（即大于该波长的光将不被记录）。

解 这里的光化作用（量子效应）的最小能量（能量阈值） A_0 与光电效应中的脱出功意义相当，与其相应的入射光的截止波长 λ_0 由下式决定

$$\frac{hc}{\lambda_0} = A_0$$

即

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A_0} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)}{10^{-18}} \text{ \AA}$$

$$\approx 19878 \text{ \AA}$$

5. 一个空腔辐射器处于6000K的温度，器壁上小圆孔的直径是0.10mm，计算每秒从此孔发出的波长在5500—5510 \text{ \AA} 之间的光子数。

解 普朗克公式给出面元 dS 的黑体在 $\lambda - \lambda + d\lambda$ 波长间隔内的辐射通量为

$$\begin{aligned}\Delta\Psi &= r_0(\lambda, T) \Delta S \Delta\lambda \\ &= \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} \Delta S \Delta\lambda \quad (\text{J/s})\end{aligned}$$

相应的光子流量为

$$\Delta N = \frac{\Delta\psi}{h\nu} = \frac{2\pi c}{\lambda^4} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} \Delta S \Delta\lambda \quad (\text{s}^{-1})$$

取

$$\lambda \approx 5505 \text{ \AA}, \quad \Delta\lambda = 5510 - 5500 = 10 \text{ \AA}$$

$$\Delta S = \frac{\pi}{4} (0.10\text{mm})^2 \approx 8 \times 10^{11} \text{ \AA}^2$$

$$c = 3 \times 10^{18} \text{ \AA/s}$$

$$\frac{hc}{kT\lambda} = \frac{(6.626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^{18})}{(1.38 \times 10^{-23}) \times 6000 \times 5505} \approx 4.361$$

算出

$$\Delta N \approx 2.123 \times 10^{15} / \text{s}$$

6. 太阳光以 1340 W/m^2 的照度投射到垂直于入射线的地球表面上，假如入射光的平均波长为 5500 \AA ，求每秒每平方米上的光子数。

解 太阳光每秒投射到地球表面每平方米上的光子数为

$$\Delta N = \frac{\text{辐照度}}{h\nu} = \frac{1340}{(6.626 \times 10^{-34}) \times \left(\frac{3 \times 10^{18}}{5500}\right)} \quad (\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\approx 37 \times 10^{20} (\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1})$$

7. 当正常人的眼睛接收 5500 \AA 的可见光时，每秒光子数达100个时就有光的感觉，问与此相当的功率是多少？

解 此时的光功率为

$$\begin{aligned}\Delta W &= \Delta N \frac{hc}{\lambda} \\ &= 100 \times \frac{(6.626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^{16})}{5500} \text{ W} \\ &\approx 3.6 \times 10^{-17} \text{ W}\end{aligned}$$

* 8. 单色电磁波的强度是 $Nh\nu$ ，其中 N 是每单位时间通过单位面积的光子数。问照在全反射镜面上的辐射压强是多少？

解 辐射压强（光压）是由光子流经反射镜后的动量改变而引起的。光子的能量为

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (a)$$

光子的动量为

$$mv = \frac{h}{\lambda} = \frac{h\nu}{c} \quad (b)$$

光强 I 与光子流密度 N 的关系为

$$I = Nh\nu \quad (c)$$

故动量流密度为

$$P = Nmv = N \frac{h\nu}{c} \quad (d)$$

由于镜面的全反射，动量流密度的改变量为

$$\Delta P = 2P = 2N \frac{h\nu}{c}$$

按动量定理，镜面的辐射压强为

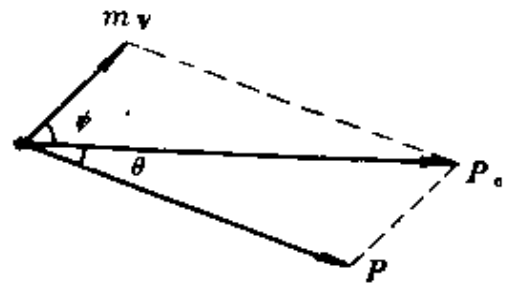
$$f = \Delta P = 2N \frac{h\nu}{c}$$

即平均光压为

$$f = \frac{2I}{c}$$

* 9. 试导出康普顿散射实验中电子的反冲角 ψ 与光子散射角 θ 的关系式。

解 如图，将动量守恒关系写成分量形式



题 9 图

$$mv \sin \psi - \frac{h}{\lambda} \sin \theta = 0$$

$$mv \cos \psi + \frac{h}{\lambda} \cos \theta = \frac{h}{\lambda_0}$$

两式相比得

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \theta}{(\lambda / \lambda_0) - \cos \theta}$$

式中分母

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{\lambda_0} - \cos \theta &= \frac{\lambda_0 + \Delta \lambda}{\lambda_0} - \cos \theta \\ &= (1 - \cos \theta) + \frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \\ &= 2 \sin^2(\theta / 2) + 2 \frac{\lambda_c}{\lambda_0} \sin^2(\theta / 2) \end{aligned}$$

代入上式，给出 ψ 与 θ 的关系为

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \frac{\cos(\theta / 2)}{\sin(\theta / 2) \left[1 + (\lambda_c / \lambda_0) \right]} \\ &= \left[\left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda_0} \right) \operatorname{tg}(\theta / 2) \right]^{-1} \end{aligned}$$

式中 λ_c 为康普顿波长（常数）， $\lambda_c = \frac{h}{mc} = 0.0241 \text{ \AA}$

* 10. 试证明，康普顿散射中反冲电子的动能 K 和入射光子的能量 E 之间的关系为

$$\frac{K}{E} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2\lambda_c \sin^2(\theta/2)}{\lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2(\theta/2)}$$

式中 $\lambda_c = h/mc$ 为康普顿波长， θ 角见上题图。

证 碰撞前后光子的动能分别为

$$E = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

$$E' = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

根据动能守恒定理，反冲电子的动能应当为

$$K = E - E'$$

其与入射光子动能之比为

$$\begin{aligned} \frac{K}{E} &= \frac{E - E'}{E} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \\ &= \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{2\lambda_c \sin^2(\theta/2)}{\lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2(\theta/2)} \end{aligned} \quad (a)$$

当散射角 $\theta = 90^\circ$ 时， $\Delta\lambda = \lambda_c$ (b)

则 $\frac{K}{E} = \frac{\lambda_c}{\lambda_0 + \lambda_c}$ (c)

11. 今有 (1) 波长为 1.00 \AA 的 X 射线束；(2) 从铯 Cs^{137} 样品得到的波长为 $1.88 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ 的 γ 射线束与自由电子碰撞，现从与入射方向成 90° 角的方向去观察散射线，问每种情况下：

- (1) 康普顿波长偏移是多少？
- (2) 入射光在碰撞时失去的能量占总能量的百分之几？
- (3) 给予反冲电子的动能为多少？

解 (1) 按康普顿波长偏移公式

$$\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2(\theta/2)$$

可见，波长偏移量与入射光波长的长短是无关的（当然，不要误

认为频移量 $\Delta\nu$ 与 λ_0 无关)。在散射角 $\theta = 90^\circ$ 时，有

$$\Delta\lambda = \lambda_c = 0.0241 \text{ \AA}$$

对 X 射线的散射是如此，对 γ 射线的散射也是如此。

(2) 按题 10 给出的公式 (c)，入射光在碰撞时失去的动能 (即反冲电子获得的成功) 与原入射光子动能 (即总能量) 之比为

$$\frac{K}{E} = \frac{\lambda_c}{\lambda_0 + \lambda_c}$$

当 $\lambda_0 = 1.00 \text{ \AA}$ 时，得

$$\frac{K}{E} = \frac{0.0241}{1.00 + 0.0241} \approx 2.35\%$$

当 $\lambda_0 = 1.88 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ 时，得

$$\frac{K}{E} = \frac{0.0241}{0.0188 + 0.0241} \approx 56\%$$

(3) 当 $\lambda_0 = 1.00 \text{ \AA}$ 时，反冲电子获得的动能为

$$\begin{aligned} K &= 2.35\% \times E = 2.35\% \times \frac{hc}{\lambda_0} \\ &= 2.35\% \times \frac{(6.626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^{18})}{1.00 \times (1.60 \times 10^{-19})} \text{ eV} \\ &= 292 \text{ eV} \end{aligned}$$

当 $\lambda_0 = 1.88 \times 10^{-2} \text{ \AA}$ 时，反冲电子获得的动能为

$$\begin{aligned} K &= 56\% \times \frac{hc}{\lambda_0} \\ &= 56\% \times \frac{(6.626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^{18})}{(1.88 \times 10^{-2}) \times (1.6 \times 10^{-19})} \text{ eV} \\ &\approx 370 \text{ keV} \end{aligned}$$

* 12. 可以用可见光来做康普顿散射实验吗？为什么？

解 这个问题是由康普顿散射波长偏移公式 $\Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2(\theta/2)$ 引起的。 $\Delta\lambda$ 量确实与入射光波长没有关系，不论长波入射或

短波入射，对固定散射角 θ 来说，偏移量 $\Delta\lambda$ 是相同的。 $\Delta\lambda$ 公式并不反映散射光的强度分布。在分析散射光的强度问题时，注意到以下两点是必要的。康普顿效应是光子与自由电子“碰撞”的量子效应，它毕竟不是纯力学中的两体碰撞，它是大量光子与大量自由电子相互作用的集体效应，作为一种近似处理，看成为光子—电子对的一次碰撞，其中每一对的碰撞具有随机性，有各种可能的散射角；不同散射角的强度分布 $I(\theta, \lambda)$ 问题不可能从一对碰撞中求得解决，这涉及入射的光子流密度中有多少几率被散射到 θ 角方向。大体上说，只有光波长极短时，光才具有明显的粒子性。X射线的波长是 \AA 的量级，这正是原子尺度的量级，这种短波射线具有极强的穿透力，有很大一部分进入靶体内部，而与体内自由电子发生有效的碰撞。而且，X射线光子能量约为 $10^3 \text{eV} - 10^4 \text{eV}$ ，而靶物质中电子束缚能约为 $10 \text{eV} - 10^2 \text{eV}$ ，前者远大于后者，致使靶物质在X射线照射下，释放出比原有多得多的自由电子，参与康普顿散射，因而大大加强了散射光强。如果长波（可见光）入射，由于金属表面的高反射和体内的强吸收，进入体内与电子碰撞的光子数几率是很小的。因此，寄托靶物质而用可见光来做康普顿散射实验，其效应是不明显的。

§ 3 玻尔原子模型与爱因斯坦辐射理论

1. (1) 不考虑电磁辐射，试证明氢原子中电子以半径 r 绕核作圆周运动时，经典理论给出的原子能量（动能 + 静电位能）为（用 MKSA 单位制表示）

$$E = - \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

式中 ϵ_0 为真空介电常数， e 为基本电荷。

(2) 验证一下普朗克常数 h 具有角动量的量纲。

(3) 设(1)中电子绕核的角动量为 J ，玻尔的“量子化条件”是 J 取如下分立值

$$J = nh/2\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

证明此时电子轨道半径也取分立值

$$r = n^2 a$$

式中 $a = \epsilon_0 h^2 / (\pi m e^2)$ ， m 为电子质量， a 称为玻尔半径。并计算玻尔半径 a 的具体数值。

(4) 证明氢原子能级 E_n 和里德伯常数 R_H 的表达式分别为

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 n^2 h^2}$$

$$R_H = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 n^2 c}$$

并计算里德伯常数 R_H 的具体数值。

(5) 量子数 $n \rightarrow \infty$ 意味着什么?

解 (1) 氢原子中电子的库仑位能为

$$U(r) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (a)$$

动能为

$$K(r) = \frac{1}{2} m v^2 \quad (b)$$

因电子绕核运动的向心力由库仑引力来提供，故

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (c)$$

或

$$m v^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (d)$$

$$K(r) = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (e)$$

所以经典电磁理论给出的氢原子的能量为

$$E(r) = K(r) + U(r) = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (f)$$

(2) 普朗克常数 h 的单位是「焦耳·秒」=「牛顿·米·秒」=「千克·米²·秒⁻¹」，而角动量为 $J = r \times mv$ ，显然 J 的单位为「千克·米²·秒⁻¹」。 h 与 J 量纲相同。

(3) 粒子作圆周运动的角动量写成

$$J = mvr = r\sqrt{m^2v^2}$$

由(1)式(d)得

$$m^2v^2 = \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

代入上式有

$$J = \sqrt{\frac{me^2 r}{4\pi\epsilon_0}}$$

再按玻尔的量子化条件，令 $J = nh \cdot 2\pi$ ，解出

$$r_n = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = n^2 a \quad (g)$$

式中 a 称为“玻尔半径”，其值为

$$a = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

$$= \frac{8.85 \times 10^{-12} \times (6.626 \times 10^{-34})^2}{3.1416 \times (9.109 \times 10^{-31}) \times (1.602 \times 10^{-19})^2} \text{ m}$$

$$\approx 0.5291 \text{ \AA}$$

(4) 引入角动量的玻尔“量子化条件”以后，引起一系列物理量的量子化，轨道半径量子化，能量取值量子化，……以式(g)给出的轨道半径 r 的取值代入式(f)，得到能量取值（能

级) 为

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a} \frac{1}{n^2} = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}$$

$$= -hcR_H \frac{1}{n^2}$$

式中 R_H 称为“里德伯常数”，其值为

$$R_H = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 \hbar^3 c}$$

$$= \frac{(9.109 \times 10^{-31}) \times (1.602 \times 10^{-19})^4}{8 \times (8.85 \times 10^{-12})^2 \times (6.626 \times 10^{-34})^3 \times 3 \times 10^8}$$

$$\approx 1.09715 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

(5) 当主量子数 $n \rightarrow \infty$ 时, $r \rightarrow \infty$, $E \rightarrow 0$, $\Delta E \rightarrow 0$ 。其能量取值高于所有束缚态, 能级间隔趋于零, 能量连续取值, 这意味着电子完全失去量子效应, 过渡为经典的自由电子模型。

* 2. 设一个两能级系统能级差 $(E_2 - E_1) = 0.01 \text{ eV}$, 问:

(1) 分别求 $T = 10^2 \text{ K}$, 10^3 K , 10^5 K , 10^8 K 时粒子数 N_2 与 N_1 之比;

(2) $N_2 = N_1$ 的状态相当于多高的温度?

(3) 粒子数发生反转时的状态相当于怎样的温度?

(4) 我们姑且引入“负温度”的概念来描述粒子数反转的状态, 你觉得 $T = -10^8 \text{ K}$ 和 $T = +10^8 \text{ K}$ 两个温度中哪一个更高?
 $T = -10^4 \text{ K}$ 和 $T = -10^8 \text{ K}$ 两个温度中哪一个更高?

解 按粒子数的玻耳兹曼正则分布律, 有

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{0.01}{kT}\right)$$

式中 kT (eV) 的量级以及相应的粒子数比值分别为

$$T = 10^3 \text{ K}, kT = (8.616 \times 10^{-5}) \times 10^3 \text{ eV} = 8.616 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

$$\frac{N_2}{N_1} \approx 0.31$$

$$T = 10^4 \text{ K}, kT = 8.616 \times 10^{-2} \text{ eV}$$

$$\frac{N_2}{N_1} \approx 0.89$$

$$T = 10^5 \text{ K}, kT = 8.616 \text{ eV}$$

$$\frac{N_2}{N_1} \approx 0.9988$$

$$T = 10^6 \text{ K}, kT = 8.616 \times 10^1 \text{ eV}$$

$$\frac{N_2}{N_1} \approx 0.999988$$

可见，正则分布的特点是，随着温度的急剧增加，粒子数比值缓慢上升而逼近 1。

(2) 当 $T \rightarrow \infty$, $\exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) \rightarrow 1$, 则

$$N_2 = N_1$$

(3) 如果仍然用正则分布的语言来描述粒子数发生反转时的状态，只能说它是“负温度”状态。

(4) 应该说， $T = -10^6 \text{ K}$ 比 $T = +10^6 \text{ K}$ 的温度高，因为前者粒子数比值比后者高。同理， $T = -10^4 \text{ K}$ 要比 $T = -10^5 \text{ K}$ 温度高。如果坚持用正则平衡分布的统计语言来描述粒子数反转这种非平衡态，势必在温度为绝对零度（正负）附近出现突变，即

$$\text{当 } T \rightarrow +0 \text{ K}, \quad \frac{N_2}{N_1} \rightarrow 0$$

$$\text{当 } T \rightarrow -0 \text{ K}, \quad \frac{N_2}{N_1} \rightarrow +\infty$$