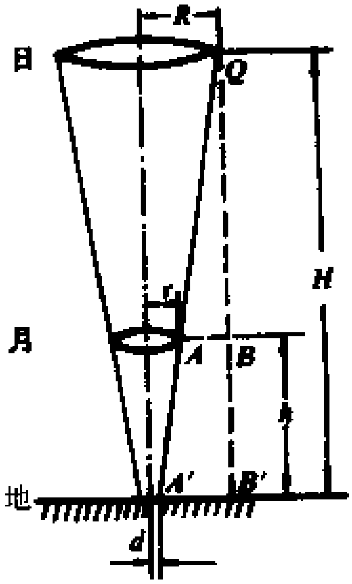
目　录

第一章　几何光学

§1　几何光学基本定律

1．　太阳与月球的直径分别是1.39×10^{6}km和3.5×10^{3}km，设日全蚀时太阳到地面的距离为1.50×10^{8}km，月球到地面的距离为3.8×10^{5}km。试计算地面上能见到日全蚀区域的面积（可把该区域的地面视为平面）。



题 1 图

解　忽略地球大气层对阳光的折射，按光的直线传播定律作几何投影图（如图所示），则地面上出现日全蚀的区域是半径为d的圆形面积。

由相似三角形的比例关系

$$\frac{\overline{QB'}}{\overline{QB}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

得

$$\frac{H}{H-h}=\frac{R-d}{R-r}$$

$$d=R-\frac{H(R-r)}{H-h}$$

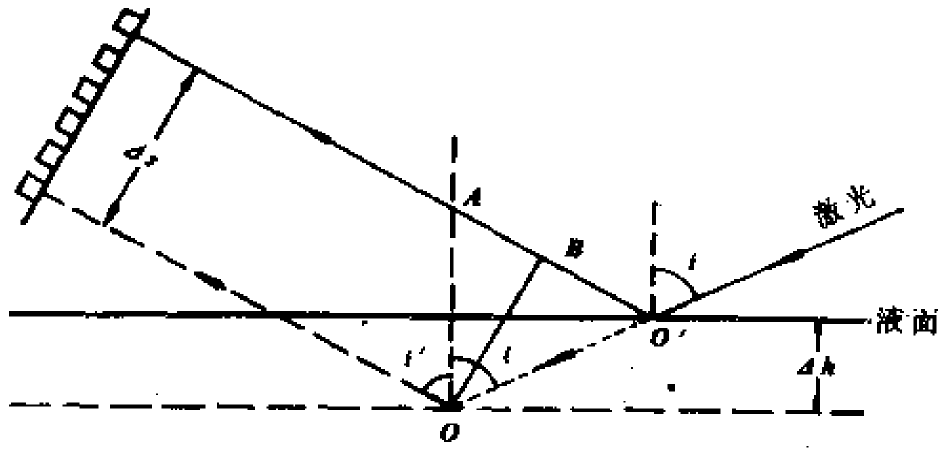
以 $R=0.695\times10^{6}$km，$r=1.75\times10^{3}$km，$H=1.5\times10^{8}$km，$h=3.8\times10^{5}$km 代入上式，算得

$$d=1.6\times10^{3}\text{km}$$

所以日全蚀区域的面积为

$$S=\pi d^{2}=7.8\times10^{6}\text{km}^{2}$$

*2. 附图所示为一种液面激光控制仪。当液面升降时，反射光斑移动，为不同部位的光电转换元件所接收，变成电讯号输入控制系统。试计算液面升高 Δh 时反射光斑移动的距离 Δs。



题 2 图

解 按光的反射定律作光路于附图，则由图可得反射光线的位移量为

$$\Delta s=\overline{OB}=\overline{OO'}\sin2\left(\frac{\pi}{2}-i\right)$$

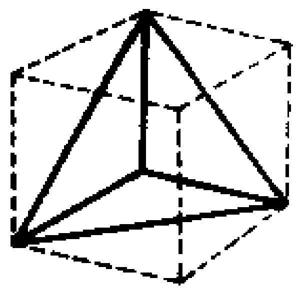
又

$$\overline{OO'}=\frac{\Delta h}{\cos i}$$

于是得

$$\Delta s=2\Delta h\sin i$$

*3. 由立方体的玻璃切下一角制成的棱镜称为四面直角体，如附图（a）所示，证明从斜面射入的光线经其它三面反射后，出射线的方向总与入射线相反。设想一下，这样的棱镜可以在什么场合发挥作用。



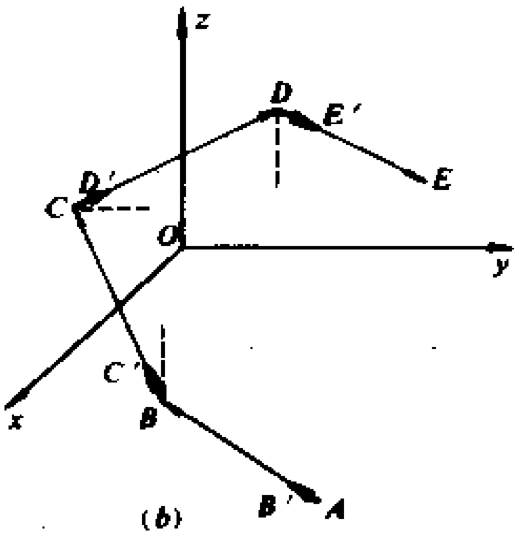
（a）

题 3 图

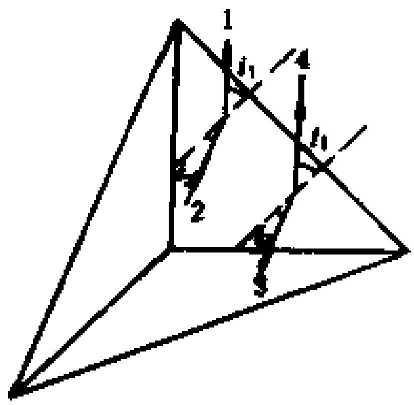
证 从斜面入射的光线经三个直角面反射后仍从斜面出射，其间光线共经历了三个直角面的三次反射和斜面往返的二次折射。证明出射线和入射线方向相反可分两步进行：

（1）先证明任意一根经三个直角面反射以后的光线总是和入射光线平行且方向相反。

用矢量的概念证明这个结论比较简单。如附图（b）所示，设三个直角面分别为xy 平面、xz 平面和 yz 平面，入射光线 AB



(b)



(c)

题 3 图

先后经三个平面反射后出射光线为 DE。并设 AB'、BC'，CD'、DE' 分别为光线 AB，BC，CD，DE 的单位矢量，则

$$AB' = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

式中α，β，γ为AB'的方向角。由于BC为AB经xy平面的反射线，根据反射定律显然有

$$BC' = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos(\pi-\gamma))$$

同理

$$CD' = [\cos\alpha,\ \cos(\pi-\beta),\ \cos(\pi-\gamma)]$$

$$DE' = [\cos(\pi-\alpha),\ \cos(\pi-\beta),\ \cos(\pi-\gamma)]$$

$$= (-\cos\alpha,\ -\cos\beta,\ -\cos\gamma)$$

因此

$$AB' = -DE'$$

即光线AB和DE反向平行。

（2）再证明斜面的出射线和入射线平行且方向相反。

如附图（c）所示，设光线1以入射角i_1入射到斜面上，其折射光线2的折射角为i_2。则根据（1）的证明，光线2经三个直角面反射后的光线3必以入射角i_2入射到斜面上，再次折射后的光线4的折射角也必为i_1。因此出射光线4必和入射光线1反向平行。

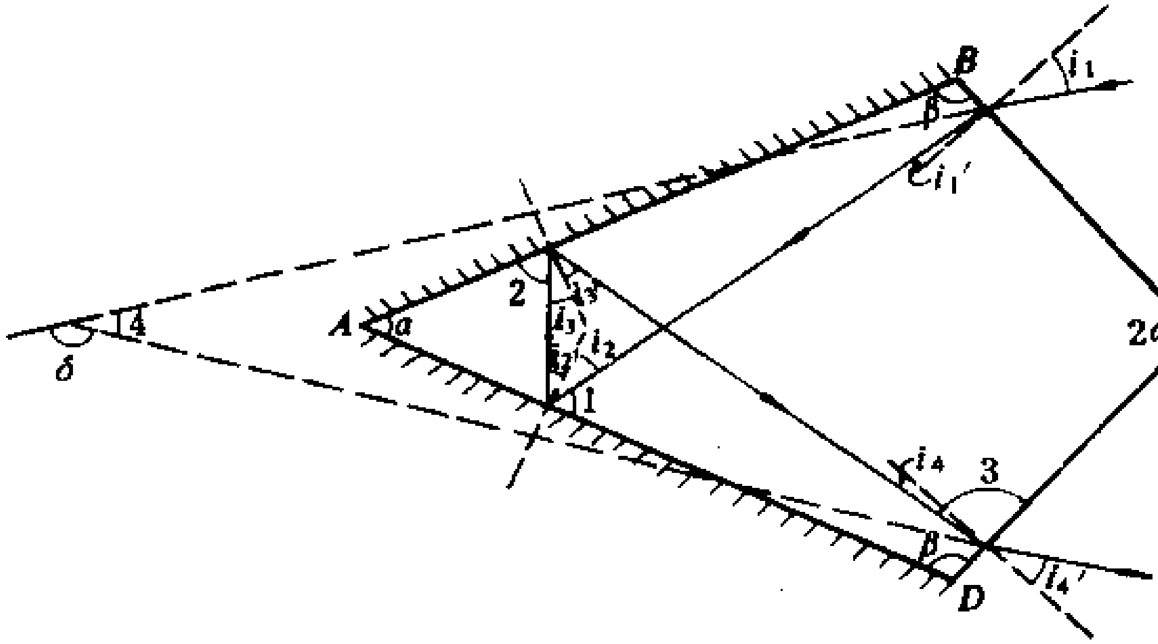
由（1）、（2）证明可知，经直角四面体棱镜二次折射和三次反射的出射线和入射线方向相反。如果入射线（即入射面）垂直于某个直角交棱，则此时光线只经过二次折射和二次反射，但显然可见出射线与入射线方向相方的结论仍然成立。

四面直角体棱镜又叫直角锥棱镜。直角锥棱镜出射线与入射线方向相反的这一特性，可以有效地利用来进行远距离激光测距。设想登月飞船把一个由多只直角锥棱镜组成的反射器送到月球表面，则地球上许多国家就可以选择反射器中的某些直角锥作为自己的“合作目标”，用激光束测量月—地距离。

*4. 光线射入如附图所示的棱镜，经两次折射和反射后射出。

（1）证明偏向角与入射方向无关，恒等于2α；

（2）在此情况下能否产生色散？



题 4 图

证 两次折射和反射的入射角、折射角、反射角分别示于图中。由几何关系和反射定律可得

$$i_2 = \frac{\pi}{2} - \angle 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[2\pi - \left(2\alpha - \beta - \frac{\pi}{2} + i_1'\right)\right]$$

$$= -\pi + 2\alpha + \beta + i_1'$$

$$i_2' = i_2$$

$$i_3 = \frac{\pi}{2} - \angle 2$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - i_2'\right)\right]$$

$$= \alpha - i_2'$$

$$i_3' = i_3$$

$$i_4 = \angle 3 - \frac{\pi}{2}$$

$$=[2\pi-(2\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}-i_3')]-\frac{\pi}{2}$$

$$=\pi-2\alpha-\beta+i_3'$$

逐次以 i_3'，i_3，i_2'，i_2 代入得

$$i_4=\pi-2\alpha-\beta+i_3$$

$$=\pi-2\alpha-\beta+(\alpha-i_2')$$

$$=\pi-\alpha-\beta-i_2'$$

$$=\pi-\alpha-\beta-(-\pi+2\alpha+\beta+i_1')$$

$$=2\pi-3\alpha-2\beta-i_1'$$

$$=-i_1'$$

又根据折射定律有

$$\sin i_1=n\sin i_1',\quad \sin i_4'=n\sin i_4$$

于是得 $$i_1=-i_4'$$

式中 n 为棱镜的折射率。因此偏向角为

$$\delta=\pi-\angle A$$

$$=\pi-[2\pi-(2\alpha+\frac{\pi}{2}+i_4'+\frac{\pi}{2}+i_1)]$$

$$=2\alpha+i_4'+i_1$$

$$=2\alpha$$

偏向角恒等于 2α，它与入射角和折射率 n 均无关，即与波长也无关。这种棱镜虽然使光受到两次折射而仍无色散，因此，可用于要求无色散的光路偏转系统。

5． 试证明：当一条光线通过平行平面玻璃板时，出射光线方向不变，只产生侧向平移。当入射角 i_1 很小时，位移为

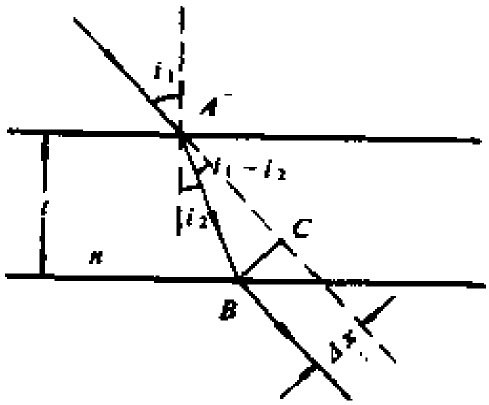
$$\Delta x=\frac{n-1}{n}i_1t$$

式中 n 为玻璃板的折射率，t 为其厚度

证 对平行平板上下表面分别两次运用折射定律，并考虑到

平板上下是同一介质，便可证明最后出射光线与当初入射光线的方向一致

如附图所示，根据几何关系可得侧向位移量为



题 5 图

$$\Delta\chi=\overline{AB}\sin(i_1-i_2)$$

$$=\frac{t}{\cos i_2}(\sin i_1\cos i_2-\cos i_1\sin i_2)$$

$$=t(\sin i_1-\frac{\cos i_1\sin i_2}{\cos i_2})$$

利用折射定律

$$\sin i_1=n\sin i_2$$

上式可改写为

$$\Delta\chi=t\sin i_1(1-\frac{\cos i_1}{n\cos i_2})$$

在 $i_2<i_1\ll1$ 的条件下，取小角近似

$$\sin i_1\approx i_1,\quad \cos i_1\approx\cos i_2\approx1$$

于是有

$$\Delta\chi\approx\frac{n-1}{n}i_1t$$

6． 证明：光线相继经过几个平行分界面的多层媒质时，出射光线的方向只与入射方向及两边的折射率有关，与中间各层媒质无关。

证 因为界面都是平行的，所以光线在同一层媒质中上界面的折射角与下界面的入射角相等。如图所示，由折射定律有

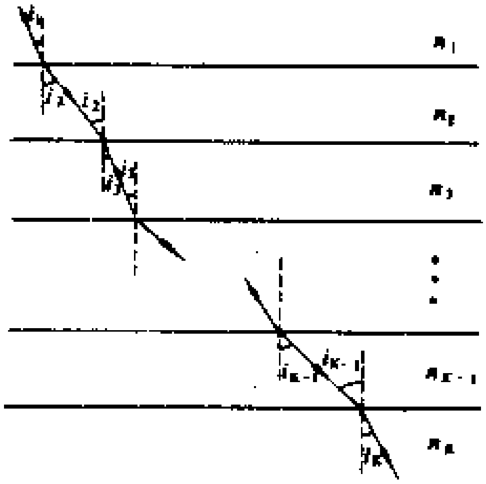
$$\sin i_2=\frac{n_1}{n_2}\sin i_1$$

$$\sin i_3=\frac{n_2}{n_3}\sin i_2=\frac{n_1}{n_3}\sin i_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin i_k=\frac{n_{k-1}}{n_k}\sin i_{k-1}=\frac{n_1}{n_k}\sin i_1$$

由此可见，最后出射光线的方向只与当初入射方向及两边介质的折射率有关。



题 6 图

*7. 顶角α很小的棱镜称为光楔。证明光楔使垂直入射的光线产生偏向角$\delta=(n-1)\alpha$，其中n是光楔的折射率

证 由于光线垂直入射，故光线在第一个界面不发生折射，仅在第二个界面有折射。

如图，根据折射定律

$$n\sin i_2=\sin i_2'$$

以及几何关系$i_2=\alpha$，故

$$n\sin\alpha=\sin i_2'$$

当α很小时，有

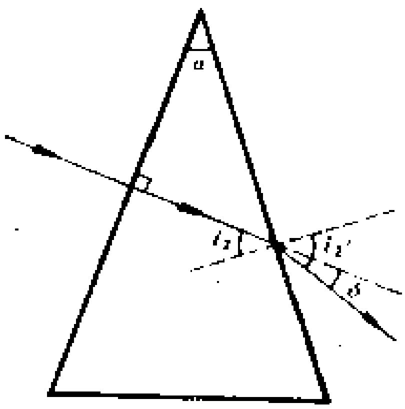
$$\sin\alpha\approx\alpha\text{，}\sin i_2'\approx i_2'$$

则上式可写成

$$n\alpha=i_2'$$

所以偏向角为

$$\delta=i_2'-i_2=n\alpha-\alpha=(n-1)\alpha$$

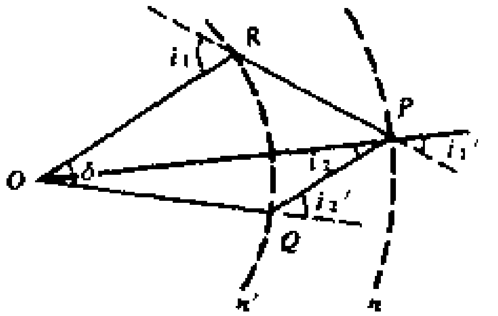


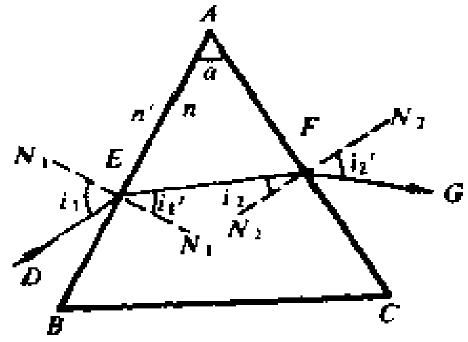
题 7 图

这个近似公式，在干涉、衍射、偏振中经常要用到，我们应当记住它

8. 附图所示是一种求折射线方向的追迹作图法。例如为了求光线通过棱镜的路径，如图（b）所示，可如图（a）以O为

中心作二圆弧，半径正比于折射率n，n'（设$n>n'$）。作OR平行于入射线DE，作RP平行于棱镜第一界面的法线N_1N_1，则OP的方向即为第一次折射后光线EF的方向。再作QP平行于第二界面的法线N_2N_2，则OQ的方向即为出射线FG的方向，从而$\angle ROQ=\delta$为偏向角。试论证此法的依据。





题 8 图

证 如图所示，由题意知图（a）中i_1，i_1'，i_2，i_2'分别为第一界面与第二界面的入射角和折射角。故只需论证i_1，i_1'和i_2，i_2'分别满足折射定律即可。

应用正弦定理于ΔORP，则有

$$\frac{\sin(\pi-i_1)}{\sin i_1'}=\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}}=\frac{n}{n'}$$

即

$$n'\sin i_1=n\sin i_1'$$

应用正弦定理于ΔOPQ，则有

$$\frac{\sin(\pi-i_2')}{\sin i_2}=\frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}=\frac{n}{n'}$$

即

$$n'\sin i_2'=n\sin i_2$$

故i_1，i_1'和i_2，i_2'分别满足折射定律。由于$OR\parallel DE$、$OQ\parallel FG$，δ即为偏向角。

9. 利用上题的图，证明最小偏向角的存在，并证明棱镜折射率的计算公式为

$$n=n'\frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}{\sin(\alpha/2)}$$

式中 δ_m 为最小偏向角。

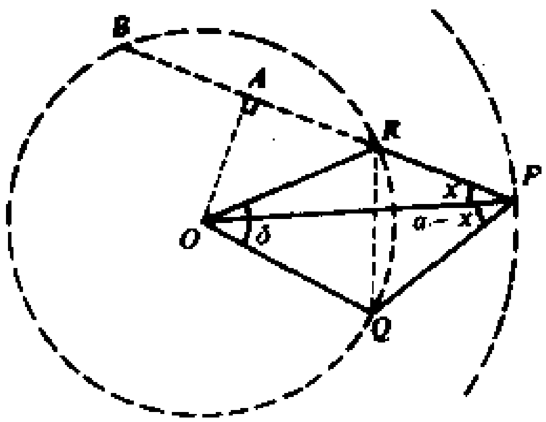
证　在上题图（b）中，有几何关系

$$i_1+i_1'=\alpha$$

因此上题光线追迹图（a）中

$$\angle RPQ=\alpha$$

如本题附图所示，在光线追迹图中 $\angle RPQ$ 是恒定的，它正是棱镜顶角 α。设 $\angle RPO=x$，则 $\angle OPQ=\alpha-x$。由于两圆弧的半径正比于折射率 n，n'，即



题 9 图

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OR}}=\frac{n}{n'}$$

设

$$\overline{OP}=n,\quad \overline{OR}=n'$$

$$\overline{RP}=l_1=l_1(x)$$

$$\overline{QP}=l_2=l_2(x)$$

则由余弦定理可得连接 R、Q 两点的弦长为

$$\Delta(x)=\overline{RQ}=l_1^2+l_2^2-2l_1l_2\cos\alpha$$

由几何关系（参见本题附图）可得上式中

$$l_1=\overline{AP}-\overline{AR}$$

$$=n\cos x-\sqrt{n'^2-n^2\sin^2 x}\qquad (a)$$

$$l_2=n\cos(\alpha-x)-\sqrt{n'^2-n^2\sin^2(\alpha-x)}\qquad (b)$$

产生最小偏向角时（即 $\angle ROQ=\delta_m$ 时）Δ 取极小值，其必要条

件是

$$\frac{d\Delta}{dx}=0$$

即

$$2l_1\frac{dl_1}{dx}+2l_2\frac{dl_2}{dx}-2l_2\cos\alpha\frac{dl_1}{dx}-2l_1\cos\alpha\frac{dl_2}{dx}=0$$

整理得

$$(l_1-l_2\cos\alpha)\frac{dl_1}{dx}+(l_2-l_1\cos\alpha)\frac{dl_2}{dx}=0 \qquad (c)$$

注意到

$$\frac{dl_1}{dx}=-n\sin x+\frac{n^2\sin x\cos x}{\sqrt{n'^2-n^2\sin^2 x}} \qquad (d)$$

$$\frac{dl_2}{dx}=-\left[-n\sin(\alpha-x)+\frac{n^2\sin(\alpha-x)\cos(\alpha-x)}{\sqrt{n'^2-n^2\sin^2(\alpha-x)}}\right] \qquad (e)$$

当 $x=\alpha/2$ 时，由式(a)，(b)得

$$l_1=l_2$$

由式(d)、(e)得

$$\frac{dl_1}{dx}=-\frac{dl_2}{dx}$$

把以上两式代入式(c)得

$$\left.\frac{d\Delta}{dx}\right|_{x=\frac{\alpha}{2}}=0$$

可以证明 $\left.\dfrac{d^2\Delta}{dx^2}\right|_{x=\frac{\alpha}{2}}>0$，故 $x=\dfrac{\alpha}{2}$ 既是产生最小偏向角的必要条件，也是产生最小偏向角的充分条件。即

$$x=\frac{\alpha}{2}\text{ 时，}\delta=\delta_m$$

从追迹图上题图（a）所示可知，当 $x=\angle RPO=\alpha/2$ 时，有

$$i_1=i_2'=\frac{1}{2}(\delta_m+\alpha)$$
$$i_1'=i_2=\frac{1}{2}\alpha$$

把以上两式代入折射定律表达式

$$n'\sin i_1=n\sin i_1'$$

则得

$$n=n'\frac{\sin[(\alpha+\delta_m)/2]}{\sin(\alpha/2)}$$

10. 已知棱镜顶角为60°，测得最小偏向角为53°14′，求棱镜的折射率。

解 把数据代入上题所得公式，并取 $n'=1$，即得

$$n=\frac{\sin\frac{\alpha+\delta_m}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{60^\circ+53^\circ14'}{2}}{\sin\frac{60^\circ}{2}}=1.670$$

11. 顶角为50°的三棱镜的最小偏向角是35°，如果把它浸入水中，最小偏向角等于多少？（水的折射率为1.33）。

解 设棱镜的折射率为 n，水的折射率为 n'，先求得

$$n=\frac{\sin\frac{50^\circ+35^\circ}{2}}{\sin\frac{50^\circ}{2}}=1.60$$

再由 $n=n'\dfrac{\sin\frac{\alpha+\delta_m}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ 得

$$\sin\frac{\alpha+\delta_m}{2}=\frac{n}{n'}\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1.60}{1.33}\sin 25^\circ$$

$$=0.5080$$

$$\frac{\alpha+\delta_m}{2}=\sin^{-1}0.5080=30^\circ 32'$$

最后求出此棱镜放在水中的最小偏向角为

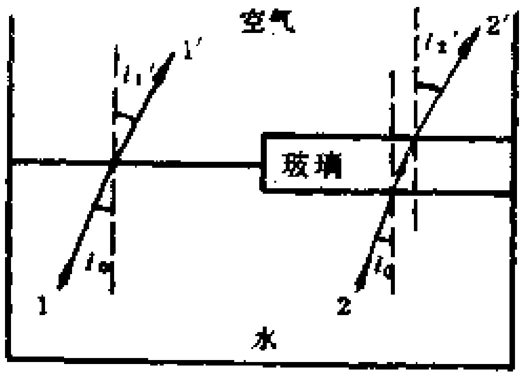
$$\delta_m=11^\circ 4'$$

12. 如附图所示，在水中有两条平行光线 1 和 2，光线 2 射到水和平行平板玻璃的分界面上。问：

（1）两光线射到空气中是否还平行？

（2）如果光线 1 发生全反射，光线 2 能否进入空气？

解 由题 6 结论光线经平行分界面的多层介质时，出射方向只与两边的折射率有关。可知本题光线 1 和 2 射到空气中仍保持平行。



题 12 图

如图所示，当 $i_1'=90^\circ$ 时，也有 $i_2'=90^\circ$，所以光线 1 发生全反射时，光线 2 也不能进入空气，光线 2 在玻璃与空气的界面上发生全反射

13. 计算光在下列媒质之间穿行时的全反射临界角：（1）从玻璃到空气，（2）从水到空气，（3）从玻璃到水。

解 设空气、水、玻璃的折射率分别为 $n_1=1.000$，$n_2=1.333$，$n_3=1.516$。

则

（1）$i_{1c}=\sin^{-1}\dfrac{n_1}{n_3}=\sin^{-1}\dfrac{1.000}{1.516}=41^\circ 16'$

（2）$i_{2c}=\sin^{-1}\dfrac{n_1}{n_2}=\sin^{-1}\dfrac{1.000}{1.333}=48^\circ 36'$

（3）$i_{3c}=\sin^{-1}\dfrac{n_2}{n_3}=\sin^{-1}\dfrac{1.333}{1.516}=61^\circ 33'$

*14. 设光导纤维玻璃芯和外套的折射率分别为 n_1 和 n_2（$n_1>n_2$），垂直端面外媒质的折射率为 n_0（见附图）。试证明，能使光线在纤维内发生全反射的入射光束的最大孔径角 θ_1 满足下式：

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

（$n_0\sin\theta_1$ 称为纤维的数值孔径）。

题14图

解 根据折射定律，得到

$$n_0\sin\theta_1=n_1\sin\theta_1'=n_1\cos\theta_2$$

$$=n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_2}$$

因为光线在玻璃芯和外套的界面上发生全反射的条件为

$$\sin\theta_2\geqslant\frac{n_2}{n_1}$$

所以，欲使光线在纤维内发生全反射，θ_1 必需满足

$$n_0\sin\theta_1\leqslant n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

故数值孔径为

$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}$$

光导纤维的数值孔径反映集光本领，是导光传象的重要性能参数之一。

15. 光导纤维外套由折射率为1.52的冕玻璃做成，芯线由折射率为1.66的火石玻璃做成，求垂直端面的数值孔径。

解 据上题给出的光导纤维数值孔径公式，算出

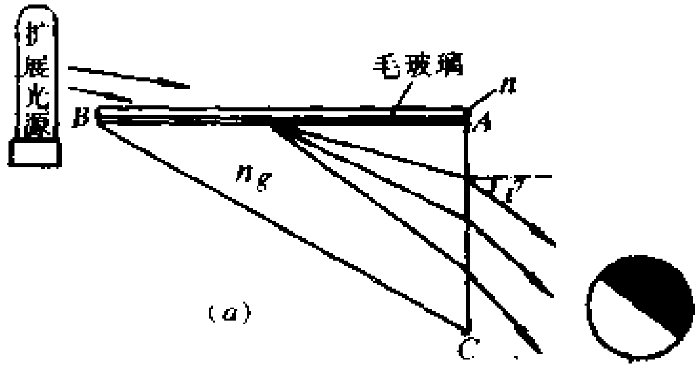
$$n_0\sin\theta_1=\sqrt{n_1^2-n_2^2}=\sqrt{1.66^2-1.52^2}$$

$$=0.667$$

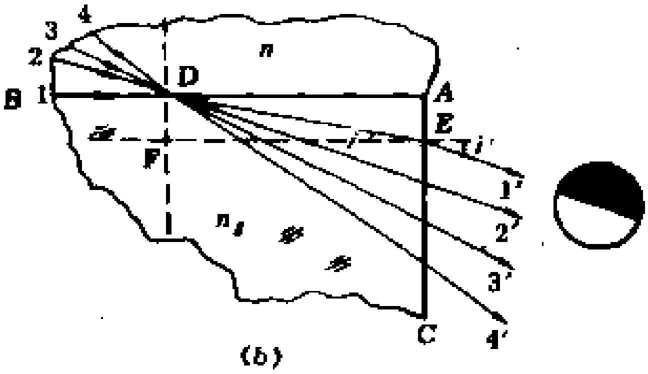
*16. 极限法测液体折射率的装置如附图（a）所示，ABC 是直角棱镜，其折射率 n_g 为已知。将待测液体涂一薄层于其上表面 AB，再覆盖一块毛玻璃。用扩展光源在掠入射的方向照明。从棱镜的 AC 面出射的光线的折射角将有一下限 i'。如用望远镜观察，则在视场中出现有明显分界线的半明半暗区。试证明，待测液体的折射率 n 可按下式算出：

$$n=\sqrt{n_g^2-\sin^2 i'}$$

用这种方法测液体的折射率，测量范围受到什么限制？



(a)



(b)

题16图

证 毛玻璃的作用是增加散射，以使液层上表面处处为散射源。如图(b)所示，在AB面入射角较小的光线，在AC面出射时折射角较大。以折射角下限i'出射的光线1'，其共轭光线1在AB面的入射角为90°。出射方向观察用的是一架接收平行光用的望远镜，它能接收从AC面出射的一系列不同方向的平行光束，同一方向的平行光在望远镜中会聚于一点。由于AC面出射光线的折射角有一下限i'，因此在视场中出现有明显分界线的半明半暗区。

对图(b)中的E点写出折射定律为

$$n_g\sin\angle DEF=\sin i'$$

对图(b)中的D点写出折射定律为

$$n_g\sin\angle EDF=n\sin 90^\circ$$

又因为

$$\angle EDF=90^\circ-\angle DEF$$

故由以上三式得

$$n = n_g \sin \angle EDF = n_g \cos \angle DEF$$

$$= n_g \sqrt{1 - \sin^2 \angle DEF} = n_g \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i'}{n_g^2}}$$

$$= \sqrt{n_g^2 - \sin^2 i'} < n_g$$

$n < n_g$是极限法测液体折射率的限制条件。如果液体相对棱镜是高折射率，经AB面一次折射后就有各种方向的平行光束，它们在AC面出射时就不可能在望远镜中出现有明显分界线的半明半暗区。

§2 惠更斯原理

1. 在空气中钠黄光的波长为5893 Å，问：

（1）其频率为多少？

（2）在折射率为1.52的玻璃中其波长为多少？

解 （1）光频

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3\times10^{10}}{5893\times10^{-8}}$$

$$= 5.09\times10^{14}\ \text{Hz}$$

式中λ_0为光谱线的真空波长。

（2）同一谱线在介质中的光波长

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{5893}{1.52}$$

$$= 3877\ \text{Å}$$

2. 在熔凝石英中波长为5500 Å的光频率为多少？已知折射率为1.460。

解 光频

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{n\lambda} = 3.74\times10^{14}\ \text{Hz}$$

3．填充下表中的空白：

谱线	F	线	D	线
媒质	真空	水	真空	水
折射率	(1)	1.337	(1)	1.333
波长(Å)	4861	(3636)	5893	(4421)
频率(Hz)	(6.17×10^{14})	(6.17×10^{14})	(5.09×10^{14})	5.09×10^{14}
光速(m/s)	(3×10^{8})	(2.24×10^{8})	(3×10^{8})	(2.25×10^{8})

解　设 f，c，v，λ_0，λ，n 分别为光的频率、真空中光速、介质中光速、真空中波长、介质中波长、介质的折射率。根据下列关系式：

$$f=\frac{c}{\lambda_0},\quad \lambda=\frac{\lambda_0}{n},\quad v=\frac{c}{n}$$

代入表中所给有关数据，把计算结果填入表中空白(括号内数据)。

从以上三题的数字计算中我们应该看到：

（1）可见光波段的光频很高，量级达10^{14}Hz相当于光扰动的周期为10^{-2}Ps量级。对于如此高频的振荡，目前尚无接收器能瞬时响应，这就导致光讯号接收时的一系列统计平均问题。

（2）波速等于频率乘以波长的公式，对任何波动都是普遍成立的，它是波动的一个运动学公式，不涉及波动的动力学机制，因而与介质无关。但是波速的具体取值却与介质性质有关。那么，当波速随介质而改变时，是频率变而波长不变，还是波长变而频率不变，或者是频率和波长都要变呢？须知，对于线性介质来说，波场中的扰动频率取决于波源，它反映波源的固有属性，而与介质无关。空间波长这个物理量正是反映波动与介质的相互作用，它是与介质有关的，自然也就与频率有关了。总之，波源(光源)所激发的某条谱线，其时间频率与介质无关，空间波长随介质而变，因而波速随介质而变，这是物理分析的结果。

（3）光频极高，光速极大(即使在介质中)，真空光速恒

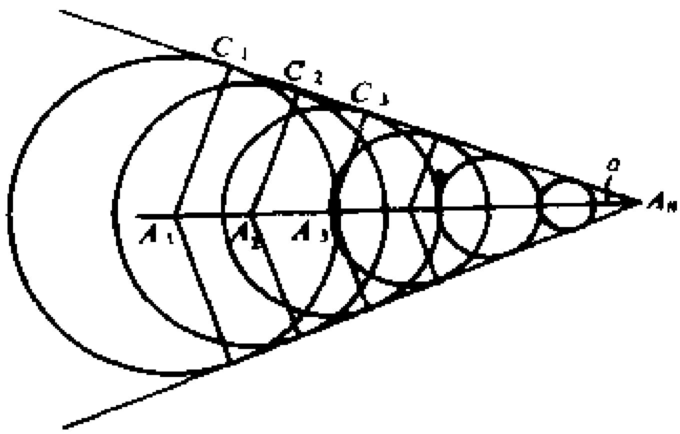
为常数（与光频无关）等是光波的特点。由于接收器时间响应能力的限制，至今所有光频的数据都是通过光波长的测量再加上折射率因素而间接获得的。

*4. 拖着棒的一端在水中以速度 v 移动，v 比水波的速率 u 大。用惠更斯作图法证明，在水中出现一圆锥形波前，其半顶角 α 由下式给出：

$$\sin\alpha = \frac{u}{v}$$

船后的弓形波，超音速飞机在空气中产生的冲击波，都是这样产生的。

证 由于棒对水的撞击（压缩），使棒端沿途各点先后成为水波源。如附图所示，设棒端在水中依次经过 A_1，A_2，$A_3\cdots A_n$点，则当棒端到达 A_n 点时，A_1，A_2，$A_3\cdots$发出的水波面分别是半径为 $u\dfrac{\overline{A_1A_n}}{v}$，$u\dfrac{\overline{A_2A_n}}{v}$，$u\dfrac{\overline{A_3A_n}}{v}\cdots$的球面。



题 4 图

作这些球面的包络面，即为宏观波面（总扰动的水波面）。设总扰动的水波面与次波面分别相切于 C_1，C_2，$C_3\cdots$各点，则

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1A_n}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_2A_n}} = \frac{\overline{A_3C_3}}{\overline{A_3A_n}} = \cdots = \frac{u}{v}$$

即宏观波面是以端点 A_n 为顶点的锥面，称为“马赫锥”，锥角大小由

$$\sin\alpha = \frac{u}{v}$$

确定。

§3　费马原理

*1．　证明反射光束的方向是等光程方向。即证明附图中

$$L(A_1B_1C_1)=L(A_2B_2C_2)$$

证　如图，分别由入射点 B_1，B_2向光线 1，2′ 作垂线，垂足标为A_1'，C_2'。显然

$$\overline{A_2B_2}=\overline{A_1A_1'},$$

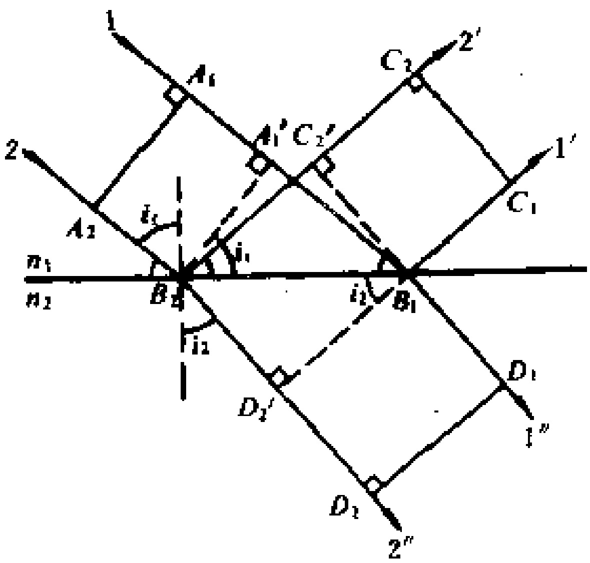
$$\overline{C_2'C_2}=\overline{B_1C_1}$$

又根据反射定律可证△$A_1'B_2B_1$与△$C_2'B_2B_1$是两个全等三角形，即

$$\overline{B_2C_2'}=\overline{A_1'B_1}$$

所以光程

$$L(A_1B_1C_1)=n_1(\overline{A_1A_1'}+\overline{A_1'B_1}+\overline{B_1C_1})$$



题 1 图

$$L(A_2B_2C_2)=n_1(\overline{A_2B_2}+\overline{B_2C_2'}+\overline{C_2'C_2})$$

是相等的。

这表明反射定律给出的反射光束的方向，正好与等光程（从入射光算起）要求的方向是一致的。

§2．　证明折射光束的方向是等光程方向。即证明上题附图中

$$L(A_1B_1D_1)=L(A_2B_2D_2)$$

证　如图，由次波源 B_1 向光线 2″ 作垂线，垂足标为D_2'。显然

$$\overline{D_2'D_2}=\overline{B_1D_1}$$

再比较 $\overline{A_1'B_1}$，$\overline{B_2D_2'}$两段的光程，在直角三角形△ $A_1'B_1B_2$，

$\triangle D_2'B_1B_2$中，有

$$\overline{A_1'B_1} = \overline{B_1B_2}\sin i_1,\ L(\overline{A_1'B_1}) = \overline{B_1B_2}n_1\sin i_1$$

$$\overline{B_2D_2'} = \overline{B_1B_2}\sin i_2,\ L(\overline{B_2D_2'}) = \overline{B_1B_2}n_2\sin i_2$$

由折射定律可知

$$n_1\sin i_1 = n_2\sin i_2$$

于是 $L(A_1'B_1) = L(B_2D_2')$

所以光程

$$L(A_1B_1D_1) = n_1\overline{A_1A_1'} + n_1\overline{A_1'B_1} + n_2\overline{B_1D_1}$$

$$L(A_2B_2D_2) = n_1\overline{A_2B_2} + n_2\overline{B_2D_2'} + n_2\overline{D_2'D_2}$$

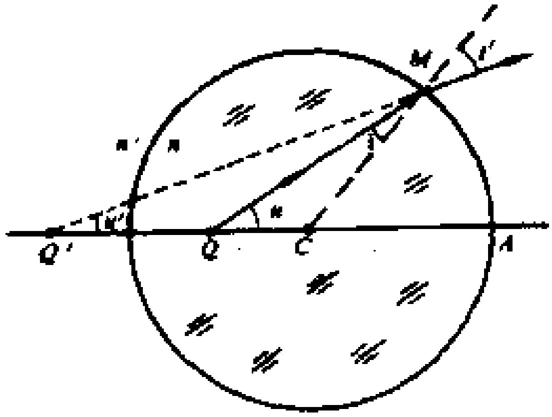
是相等的。

这表明折射定律给出的折射光束的方向，正好与等光程（从入射光算起）要求的方向是一致的。

§4 成 象

*1. 试导出，球面折射宽光束严格成象的一对共轭点（齐明点）的位置公式。

解 如图，设球面半径为R，物象方折射率分别为n、n'，按我们的符号法则，由顶点A算起的距离$\overline{AQ} = s$，$\overline{AQ'} = -s'$，$\overline{AC} = -R$，由球心算起的距离$\overline{CQ} = s_0$，$\overline{CQ'} = -s_0'$，于是



题 1 图

$$s = s_0 + (-R)$$

$$s' = s_0' + R$$

在$\triangle CMQ$，$\triangle CMQ'$中分别应用正弦定理，则有

$$\frac{\sin u}{\sin i} = \frac{-R}{s_0} = \frac{-R}{s+R}$$

$$\frac{\sin u'}{\sin i'}=\frac{-R}{-s_0'}=\frac{-R}{-s'+R}$$

解得

$$s_0=-R\frac{\sin i}{\sin u}$$

$$s_0'=R\frac{\sin i'}{\sin u'}$$

又据根折射定律

$$n\sin i=n'\sin i'$$

以及角度关系 $u=u'+(i'-i)$，进一步得到

$$s_0=-\frac{n'}{n}\frac{\sin i'}{\sin u}R$$

$$s_0'=R\frac{\sin i'}{\sin(u+i-i')}$$

$$=-\frac{n}{n'}\frac{\sin u}{\sin(u+i-i')}s_0$$

由此可见，一般情况下 Q' 位置是 Q 点位置 s_0 和出射角 u 的复杂函数，只在 $u=i'$ 的特殊条件下才有

$$s_0=-\frac{n'}{n}R,\quad s_0'=\frac{n}{n'}R$$

此时 Q' 位置与出射角 u 无关，使 Q，Q' 成为宽光束严格成象的一对共轭点，同时还有

$$u=i',\quad u'=i$$

以及

$$\frac{-s'}{s}=\frac{\sin u}{\sin u'}$$

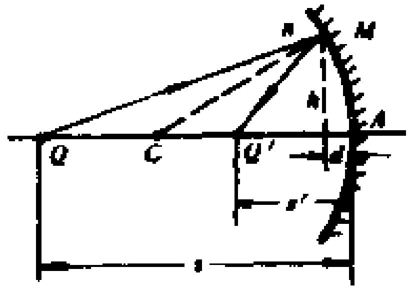
等关系成立。

2、　由费马原理导出傍轴条件下球面反射近似成象，以及物象距公式。

解　本题要求我们不是利用反射定律，而是利用费马原理去证明在傍轴条件下，球面反射可以近似成象，并由此导出物象距公式。

如附图所示，设轴上物点 Q 发出的光线经球面 M 点后的反射光线交光轴于 Q' 点，则光程

$$L(QMQ') = n\overline{QM} + n\overline{MQ'}$$



题 2 图

设球面反射镜的曲率半径为 r，则 $\overline{AC} = \overline{MC} = -r$（曲率半径为负），由几何关系可得

$$h^2 = d(2|r| - d) = -d(2r + d)$$

$$\overline{QM} = [(s-d)^2 + h^2]^{\frac{1}{2}} = [(s-d)^2 - d(2r+d)]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [s^2 - 2d(r+s)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{MQ'} = [(s'-d)^2 + h^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [s'^2 - 2d(r+s')]^{\frac{1}{2}}$$

在 $d \ll s, s', |r|$ 的傍轴条件下，略去二阶以上无穷小量得

$$\overline{QM} \approx s\left[1 - \frac{d(r+s)}{s^2}\right]$$

$$\overline{MQ'} \approx s'\left[1 - \frac{d(r+s')}{s'^2}\right]$$

从而

$$L(QMQ') = ns\left[1 - \frac{d(r+s)}{s^2}\right] + ns'\left[1 - \frac{d(r+s')}{s'^2}\right]$$

要求等光程，即令

$$L(QMQ') = L(QAQ')$$

得方程

$$ns\left[1 - \frac{d(r+s)}{s^2}\right] + ns'\left[1 - \frac{d(r+s')}{s'^2}\right] = ns + ns'$$

解出

$$s' = -\frac{rs}{r + 2s}$$

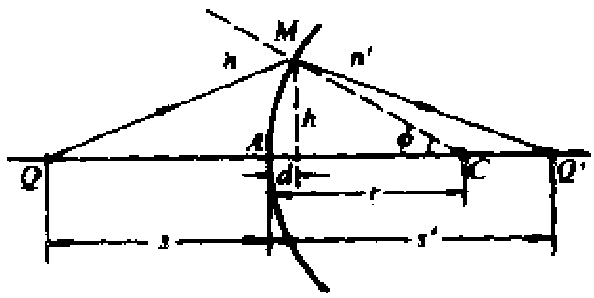
可见 s' 只与 s 有关，与 d 无关。这表明在傍轴范围内，无论入射光线的高度如何，等光程要求下的 s' 有解。根据费马原理的推论——物象等光程性，可知Q点成象于Q'点。Q'的位置公式 $s'=-rs/(r+2s)$ 可以改写成

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=-\frac{2}{r}$$

上式就是球面反射傍轴成象的物象距公式。

*3. 由费马原理导出傍轴条件下球面折射近似成象，以及物象距公式。

解一 如附图所示，轴上物点Q发出的光线与折射球面相遇于 M，折射后交光轴于Q'。设球面的半径为 r，则 $r=\overline{AC}=\overline{MC}$（曲率半径为正）。与上题同理可得光程



题 3 图

$$L(QMQ')=n\overline{QM}+n'\overline{MQ'}$$

$$\approx ns\left[1+\frac{d(r+s)}{s^2}\right]+n's'\left[1+\frac{d(r-s')}{s'^2}\right]$$

要求等光程，即令

$$L(QMQ')=L(QAQ')$$

得方程

$$ns\left[1+\frac{d(r+s)}{s^2}\right]+n's'\left[1+\frac{d(r-s')}{s'^2}\right]=ns+n's'$$

如果上式所列方程对 s' 有解，而且Q'的位置 s' 与 d 无关，则由费马原理的推论——物象等光程性，表明Q经球面折射成象于Q'。化简上式得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

可见在傍轴条件下Q'的位置s'与d无关，只与Q的位置s有关，表明Q成象于Q'。上式即为球面折射傍轴成象的物象距公式。

解二 如附图所示，轴上Q点发出的光线经球面M点折射后，折射光线交光轴于Q'。半径MC与光轴的夹角为ϕ，设球面的半径为r，则$r=\overline{MC}$（曲率半径为正）。光程

$$
\begin{aligned}
L(QMQ') &= n\overline{QM}+n'\overline{MQ'} \\
&= n\sqrt{r^2+(r+s)^2-2r(r+s)\cos\phi} \\
&\quad + n'\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\phi}
\end{aligned}
$$

根据费马原理，有

$$dL(QMQ') = dL(\phi) = 0$$

即

$$n\frac{2r(r+s)\sin\phi}{2\sqrt{r^2+(r+s)^2-2r(r+s)\cos\phi}}d\phi$$

$$+n'\frac{-2r(s'-r)\sin\phi}{2\sqrt{r^2+(s'-r)^2+2r(s'-r)\cos\phi}}d\phi=0$$

在傍轴条件下，$\phi\ll 1$，$\cos\phi\approx 1$，上式可化简为

$$\left(n\frac{r+s}{s}+n'\frac{r-s'}{s'}\right)r\sin\phi\, d\phi=0$$

进一步化简得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

可见Q'的位置s'与ϕ无关，只与Q的位置s有关。说明Q经球面折射傍轴成象于Q'。上式即为物象距公式。

§5 共轴球面组傍轴成象

*1. 根据反射定律推导球面反射镜的物象距公式和焦距

公式。

解　如附图所示，设入射角为 i，反射角为 i'，入射线、反射线、半径 CM 与光轴的夹角分别为 u、u'、ϕ，Q成象于Q′，则

$$i = \phi - u$$

$$i' = u' - \phi$$

在傍轴条件下有

$$\phi \approx \frac{h}{-r},\quad u \approx \frac{h}{s},\quad u' \approx \frac{h}{s'}$$

又根据反射定律 $i = i'$，所以

$$\frac{h}{-r} - \frac{h}{s} = \frac{h}{s'} - \frac{h}{-r}$$

整理上式即得球面反射镜的物象距公式为

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r}$$

令 $s' = \infty$，$s = f$ 和 $s = \infty$，$s' = f'$ 得球面反射镜焦距公式为

$$f = f' = -\frac{r}{2}$$

2．　物体放在凹面反射镜前何处，可产生大小与物体相等的倒立实象？

解　设物距为 s，根据题意，球面反射镜的横向放大率

$$V = -\frac{s'}{s} = -1$$

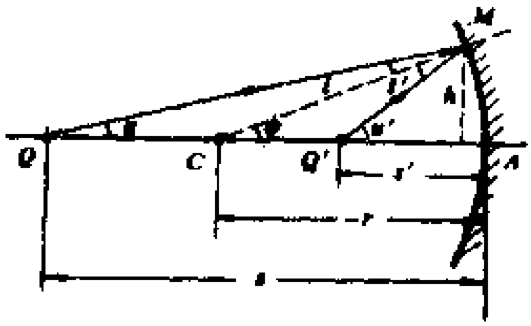
则得象距

$$s' = -sv = s$$

再代入反射球面成象公式解得

$$s = -r$$

故物体应放在凹球面反射镜前球心处。



题 1 图

3．　凹面镜的半径为40 cm，物体放在何处成放大两倍的实象？放在何处成放大两倍的虚象？

解 实物形成两倍实象时，球面反射镜的横向放大率 $V_1 = -2$，实物形成两倍虚象时 $V_2 = +2$。联立反射镜物象距公式及横向放大率公式

$$\begin{cases} \dfrac{1}{s'} + \dfrac{1}{s} = -\dfrac{2}{r} \\ s' = -Vs \end{cases}$$

解得

$$s = \frac{1-V}{2V} r$$

按题意，以 $r = -40\,\text{cm}$，$V_1 = -2$，$V_2 = +2$ 代入，分别算出

$$s_1 = +30\,\text{cm}$$

$$s_2 = +10\,\text{cm}$$

即物体应分别置于凹面镜前30 cm和10 cm处。

4. 要把球面反射镜前10 cm处的灯丝成象于3 m处的墙上，镜形应是凸的还是凹的？半径应有多大？这时象放大了多少倍？

解 以物距 $s = +10\,\text{cm}$，象距 $s' = +300\,\text{cm}$ 代入球面反射镜物象距公式和横向放大率公式，分别求得球面镜的曲率半径和横向放大率为

$$r = -19.4\,\text{cm}$$

$$V = -30$$

这说明，为了满足象距要求应选用一块凸面镜，此时得到的是一个放大了30倍的倒立的实象。

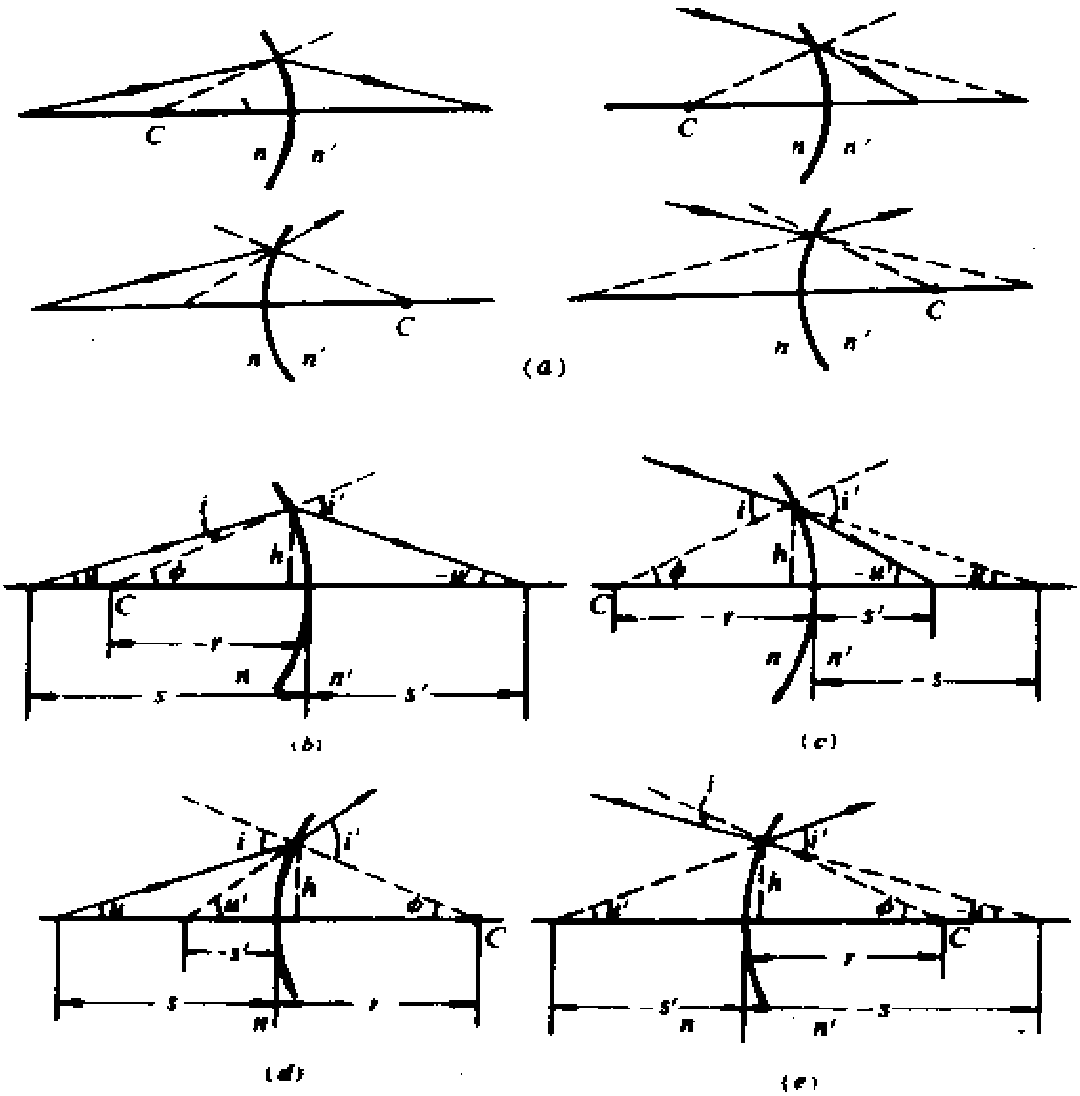
5. 一凹面镜的曲率半径为24 cm，填充下表中的空白（表中物距 s 为已知），并作出相应的光路图。

物距 s (cm)	−24	−12	−6.0	0	6.0	12	24	36
象距 s' (cm)	8.0	6.0	4.0	0	−12	∞	24	18
横向放大率 V	1/3	1/2	2/3	1	2	∞	−1	−1/2
象的虚实	实	实	实	虚	虚	实	实	实
象的正倒	正	正	正	正	正	倒	倒	倒

解 分别把数据代入球面反射镜物象距公式和横向放大率公式，把计算结果填于表中空白。光路图从略。

6. 按我们约定的正负号法则（Ⅰ）（Ⅱ）（Ⅲ）（Ⅳ）（Ⅴ）等，标出附图（a）各图中的物距 s、象距 s'、曲率半径 r、光线倾角 u，u'的绝对值。比较各图中折射率 n，n'的大小，指明各图中物、象的虚实。

解 结果示于图（b）、（c）、（d）、（e）中。



题 6 图

（b） n n'，实物，实象

（c） n n'，虚物，实象

（d）　$n>n'$，实物，虚象

（e）　$n>n'$，虚物，虚象

*7. 分别据上题各图推导球面折射成象公式。

解　书中已就图（b）的情况导出傍轴条件下球面折射成象的物象距公式

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

此式是否普遍，是否适用于其它如图（c），（d），（e）等三种情况，这是需要论证的。此题意图就在于此。下面分别推导（c），（d），（e）各图在傍轴条件下的成象公式。

在图（c）情况下，考虑傍轴近似，折射定律可写成

$$ni\approx n'i' \qquad (a)$$

又有

$$-u\approx\frac{h}{-s},\quad -u'\approx\frac{h}{s'}$$

$$\phi=\frac{h}{-r}$$

由几何关系得

$$i=\phi+(-u)$$
$$i'=\phi+(-u')$$

从而

$$i=h\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{-s}\right)$$

$$i'=h\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{s'}\right)$$

代入式（a）有

$$nh\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{-s}\right)=n'h\left(\frac{1}{-r}+\frac{1}{s'}\right)$$

整理得

光

1

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

同理，对图（d）情况，在傍轴条件下有

$$i=\phi+u=\frac{h}{r}+\frac{h}{s}$$

$$=h\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)$$

$$i'=\phi+u'=\frac{h}{r}+\frac{h}{s'}$$

$$=h\left(\frac{1}{r}\quad\frac{1}{s'}\right)$$

代入本题式（a）得

$$n\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r}\quad\frac{1}{s'}\right)$$

整理得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

在图（e）情况下，考虑傍轴近似有

$$i=\phi-(-u)=h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{-s}\right)$$

$$=h\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)$$

$$i'=\phi+u'=h\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{-s'}\right)$$

$$=h\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)$$

代入本题式（a）有

$$n\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\right)=n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s'}\right)$$

整理得

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

至此，证明了以上四种情况下的物象距公式采取同一形式，不同之处在于公式中各量的正负号有所区别，这种区别由事先约定的一套正负号规则来判断。这种处理方法是符合人们记忆习惯的。反之，如果我们采取所有量都取正号，那么以上四种情况下就有四种不同形式的物象距公式，它不便于记忆。任何一本几何光学书中必须交代清楚自己的正负号约定，不同书中的正负号约定将可能不同，因此物象距等一套公式在形式上也将不同，阅读时应当予以注意。

8. 若空气中一球形透明体能将平行光束会聚于其背面的顶点上，此透明体的折射率应等于多少？

解 由球面折射成象的焦距公式

$$f'=\frac{n'r}{n'-n}$$

得

$$n'=\frac{f'n}{f'-r}$$

按题意 $f'=2r$，$n=1.00$ 代入上式得

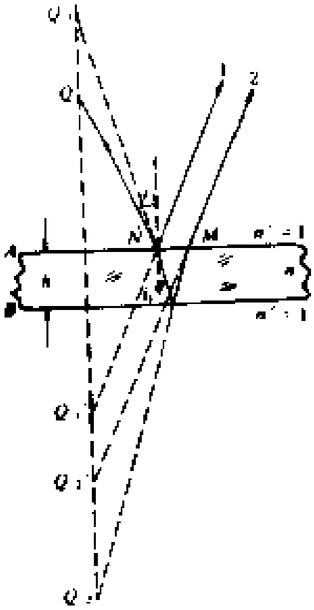
$$n'=\frac{2rn}{2r-r}=2n=2.00$$

即此透明体的折射率二倍于周围介质的折射率。

9. 如附图，一平行平面玻璃板的折射率为 n，厚度为 h，点光源Q发出的傍轴光束（即接近于正入射的光束）经上表面反射，成象于Q_1'；穿过上表面后在下表面反射，再从上表面折射的光束成象于Q_2'。证明Q_1'、Q_2'间的距离为 $2h/n$。

（提示：把平面看成 $r\to\infty$ 的球面，并利用球面折射公式计算。）

证一 Q_1'是由Q经上表面A反射成象所得。Q_2'是Q经A面折射、B面反射、再经A面折射三次成象所得（如图）。先计算Q_2'的位置，设Q离A面的距离为s_1，Q第一次经A面折射成象有



题 9 图

$$\frac{n}{s_1'}+\frac{n'}{s_1}=0$$

解得

$$s_1'=-\frac{n}{n'}s_1=-ns_1$$

即象Q_1在A面上方距A面ns_1处，距离B面(ns_1+h)。第二次经B面反射成象Q_2，按镜象对称知道象Q_2在B面下方距B面(ns_1+h)处，距A面(ns_1+2h)。第三次再经A面折射成象

$$\frac{1}{s_3'}+\frac{n}{s_3}=0$$

$$s_3=ns_1+2h$$

解得

$$s_3'=-\frac{s_3}{n}=-\left(s_1+\frac{2h}{n}\right)$$

即象Q_3在A面下方距A面(s_1+2h/n)处。

Q经A面反射成象Q_1'在A面下方s_1处，所以$Q_1'Q_2'$间的距离为

$$\Delta s=\left(s_1+\frac{2h}{n}\right)-s_1$$

$$=\frac{2h}{n}$$

证二 如附图，设在A面的入射角为i_1，折射角为i_2，则

$$\overline{NM} = 2h\,\mathrm{tg}\,i_1'$$

$$\overline{Q_1'Q_2'} = \frac{\overline{NM}}{\mathrm{tg}\,i_1} = 2h\frac{\mathrm{tg}\,i_1'}{\mathrm{tg}\,i_1} = 2h\frac{\sin i_1'}{\sin i_1}\cdot\frac{\mathrm{con}\,i_1}{\cos i_1'}$$

$$= \frac{2h}{n}\,\frac{\cos i_1}{\cos i_1'}$$

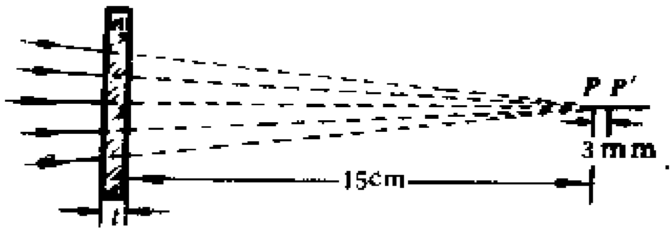
在傍轴条件下 $\cos i_1 \approx \cos i_1' \approx 1$，所以

$$\overline{Q_1'Q_2'} = \frac{2h}{n}$$

由此可见，象位移值与物点高度无关，只与平行平板的厚度和折射率有关。

10. 如附图，一会聚光束本来交于P点，插入一折射率为1.50的平面平行玻璃板后，象点移至P'。求玻璃板的厚度t。

解 本题是P点经两次平面（半径为无穷大的球面）折射成象于P'点。联立物象距公式(令$r \to \infty$)



题10图

$$\frac{1}{s_1} = \frac{n}{s_1'}$$

$$\frac{n}{s_2} = \frac{1}{s_2'}$$

并注意到 $s_2 = -(s_1' - t)$，解出

$$s_2' = -\frac{(ns_1 - t)}{n}$$

须知物象之间的位移值

$$\overline{PP'} = (s_2' - t) - (-s_1)$$

$$= \frac{n-1}{n}t$$

所以

$$t = \frac{n}{n-1}\overline{PP'}$$

与物点P的远近无关，原题中的数据15cm不是必要的。以$n=1.50$，$\overline{PP'}=3$ mm代入上式算出

$$t = 9$$ [illegible]

§6 薄 透 镜

*1. 某透镜用$n=1.50$的玻璃制成，它在空气中的焦距为10.0cm，它在水中的焦距为多少？（水的折射率为4/3）

解 设薄透镜材料的折射率为n_L，物象方（同一介质）的折射率为n_0，则薄透镜的焦距公式应当为

$$f = \frac{1}{\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

如设该透镜在空气中和在水中的焦距分别为f_1，f_2，按上式有

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{n_L-1}{\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)}$$

则

$$f_2 = \frac{1.50-1}{\frac{3}{4}\times 1.50-1}f_1 = 4f_1 = 40\,\text{cm}$$

2. 一薄透镜折射率为1.500，焦度为500屈光度。将它浸入某液体，焦度变为-1.00屈光度。求此液体的折射率。

解 焦距f（米）与焦度P（屈光度）的关系为

$$P=\frac{1}{f}$$

所以薄透镜（折射率为n_L）在介质（折射率为n_0）中的焦度公式应当写成

$$P=\left(\frac{n_L}{n_0}-1\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

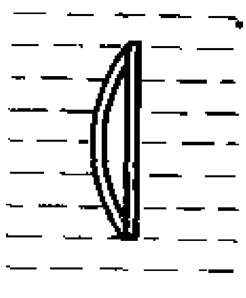
如果薄透镜分别置于两种介质（折射率分别为n_1和n_2）中，则其焦度之比为

$$\frac{P_2}{P_1}=\left(\frac{n_L}{n_2}-1\right)\Big/\left(\frac{n_L}{n_1}-1\right)$$

按题意$(P_2/P_1)=-1/500$，$n_L=1.500$，$n_1=1.000$，由此算出第二种介质（液体）的折射率为

$$n_2=\frac{n_L}{0.999}=1.502$$

3. 用一曲率半径为20cm的球面玻璃和一平面玻璃粘合成空气透镜（见附图）。设玻璃壁厚可忽略，水和空气的折射率分别为4/3和1，求此浸于水中透镜的焦距f。此透镜是会聚的还是发散的？



题3图

解 以$n_L=1$，$n_0=4/3$，$r_1=20$cm，$r_2=\infty$代入薄透镜焦距公式（见题1解），算出该空气薄透镜（置于水中）的焦距为

$$f=-80\text{cm}$$

它是发散透镜。由此可见，笼统地说"凸透镜是会聚透镜"是不对的，这句话只在周围介质折射率小于透镜折射率时是正确的。

4. 一凸透镜的焦距为12cm，填充下表中的空白，物距s为已知，并作出相应的光路图。

物距 s（cm）	-24	12	6.0	0	6.0	12	24	36
象距 s'（cm）	8	6	4	0	12	∞	24	18
横向放大率 V	1/3	1/2	2/3	1	2	-∞	-1	-1/2
象的虚实	实	实	实		虚	实	实	实
象的正倒	正	正	正	正	正	倒	倒	倒

解 根据薄透镜的物象距高斯公式和横向放大率公式，分别代入数据把计算结果填于表中空白中。光路图从略。

5. 一凹透镜的焦距为12 cm，填充下表中的空白（物距 s 为已知），并作出相应的光路图。

物距 s（cm）	24	-12	-6.0	0	6.0	12	24	36
象距 s'（cm）	24	∞	12	0	-4	6	8	9
横向放大率 V	1	∞	2	1	2/3	1/2	1/3	1/4
象的虚实	虚	实	实		虚	虚	虚	虚
象的正倒	倒	正	正	正	正	正	正	正
图号	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)

解 根据薄透镜的物象距高斯公式和横向放大率公式，分别代入数据把计算结果填于表中空白内。光路图略。

6. 在5 cm焦距的凸透镜前放一小物，要想成虚象于25 cm到无穷远之间，物应放在什么范围里？

解 在薄透镜物象公式的高斯形式中，令象距

$$-\infty < s' < 25\ \text{cm}$$

得物距

$$4.2\ \text{cm} < s < 5\ \text{cm}$$

即物应放在透镜前4.2 cm至5 cm处。

7. 一光源与屏间的距离为1.6m，用焦距为30 cm的凸透镜插在二者之间，透镜应放在什么位置，才能使光源成象于屏上？

解 设光源离透镜距离为 s，则屏离透镜的距离为 $s' = l - s$，

l = 160cm。由高斯公式求得物距有两个解，即

$$s_1 = 120\text{cm}$$

$$s_2 = 40\text{cm}$$

即透镜放在光源后120cm处和40cm处均能使光源成实象于屏上。当 $s_1 = 120\text{cm}$ 时，物成缩小实象；当 $s_2 = 40\text{cm}$ 时物成放大实象。

8． 屏幕放在距物100cm处，二者之间放一凸透镜。当前后移动透镜时，我们发现透镜有两个位置可以使物成象在屏幕上。测得这两个位置之间的距离为20.0cm，求：

（1）这两个位置到幕的距离和透镜的焦距；

（2）两个象的横向放大率。

解 在物象距离（大于4倍焦距）一定的条件下，利用光的可逆性原理可以证明，两次成象的物象距满足对易关系，即第一次成象的物距正是第二次成象的象距，第一次成象的象距正是第二次成象的物距。这个结论也可以由高斯公式求得。令 $l = s + s'$，应用高斯公式得

$$s^2 - ls + lf = 0$$

解出

$$s = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$$

即

$$s_1 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}, \quad s_1' = l - s_1 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$$

$$s_2 = \frac{l - \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}, \quad s_2' = l - s_2 = \frac{l + \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$$

由此可见，两次物距差为

$$\Delta s = s_1 - s_2 = \sqrt{l^2 - 4lf}$$

已知 $l = 100\text{cm}$，$\Delta s = 20.0\text{cm}$，于是透镜焦距

$$f = \frac{l^2 - (\Delta s)^2}{4l} = 24.0\text{cm}$$

两次象距分别为

$$s_1' = 40\text{cm}, \quad s_2' = 60\text{cm}$$

横向放大率分别为

$$V_1 = -\frac{2}{3}, \quad V_2 = -\frac{3}{2}$$

且有

$$V_1 V_2 = 1$$

9. 如上题，在固定的物与幕之间移动凸透镜。证明：要使透镜有两个成象位置，物和幕之间的距离必须大于4倍焦距。

证 设物与幕距离为 l，上题已经解出

$$s = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 4lf}}{2}$$

欲使透镜有两个成象位置，物距应有两个实数解，也即必须要求

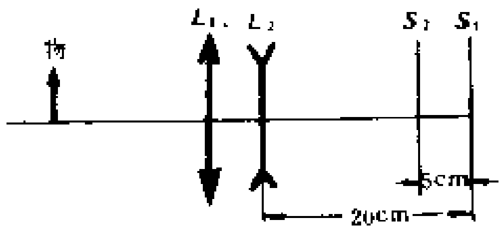
$$l^2 - 4lf > 0$$

即

$$l > 4f$$

*10. 如附图，L_1，L_2分别为凸透镜和凹透镜。前面放一小物，移动屏幕到L_2后20cm的s_1处接收到象。现将凹透镜L_2撤去，将屏幕移前5cm至s_2处，重新接收到象。求凹透镜L_2的焦距。

解 这是测定发散透镜焦距的一种实用方法（物距-象距法），其中会聚透镜是这种方法所要求的一个辅助透镜。按题意无凹透镜时所成的实象正是凹透镜引入后的虚物，此时对凹透镜来说，物距 $s = -(20-5) = -15\text{cm}$，象距 $s' = 20\text{cm}$。

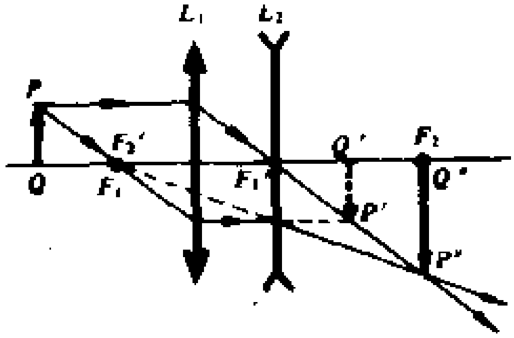


题10图

由高斯公式算出凹透镜焦距

$$f = -60\,\text{cm}$$

11. 一光学系统由一焦距为5.0cm的会聚透镜L_1和一焦距为10.0cm的发散透镜L_2组成，L_2在L_1之右5.0cm。在L_1之左10.0cm处置一小物，求经此光学系统后所成的象的位置和横向放大率。用作图法验证计算结果。



题 11 图

解 这是两次成象问题，设对L_1的物距、象距分别为s_1、s_1'，对L_2的物距、象距分别为s_2、s_2'，并注意到$s_2 = -(s_1' - d)$，d是L_2在L_1右方的距离。把数据代入高斯公式得

$$\frac{1}{s_1'} + \frac{1}{10.0} = \frac{1}{5.0}$$

$$\frac{1}{s_2'} + \frac{1}{-(s_1' - 5.0)} = \frac{1}{-10.0}$$

解得

$$s_1' = 10.0\,\text{cm}，\quad s_2' = 10.0\,\text{cm}$$

并有 $$s_2 = -5.0\,\text{cm}$$

所以经此光学系统象成在L_2之右10.0cm处。横向放大率分别为

$$V_1 = -\frac{s_1'}{s_1} = -\frac{10.0}{10.0} = -1.0$$

$$V_2 = -\frac{s_2'}{s_2} = -\frac{10.0}{-5.0} = 2.0$$

总放大率为

$$V = V_1 V_2 = -2.0$$

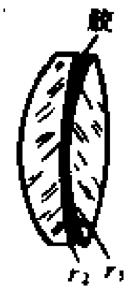
作图法验证如附图所示。

***12.** 当粘合两薄透镜时，若相接触的表面曲率半径r_2,

r_3不吻合（见附图），复合透镜的焦距公式应如何修改？

解 这里的粘合剂又可以看为一个两侧为空气的透镜，于是复合透镜相当于三个透镜的密接，其合成焦距公式为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_0}+\frac{1}{f_2}$$



题12图

式中 f_1，f_2分别为原来两个透镜（两侧是空气）的焦距，f_0是胶透镜的焦距，它应当为

$$f_0=\frac{1}{(n_0-1)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)}$$

式中 n_0 为胶的折射率。由此可见，当 $r_2=r_3$，即两透镜吻合时，$f_0\to\infty$。即使有一层胶，合成焦距公式仍为

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

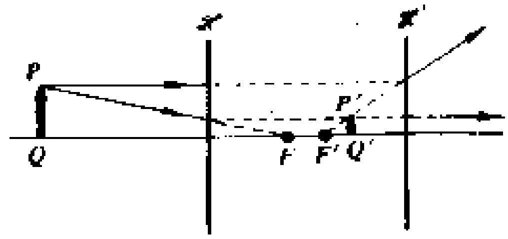
§7 理想光具组理论

1． 如图所示，已知光具组的主面和焦点用作图法求各图中Q点的象（入射线从左到右）。

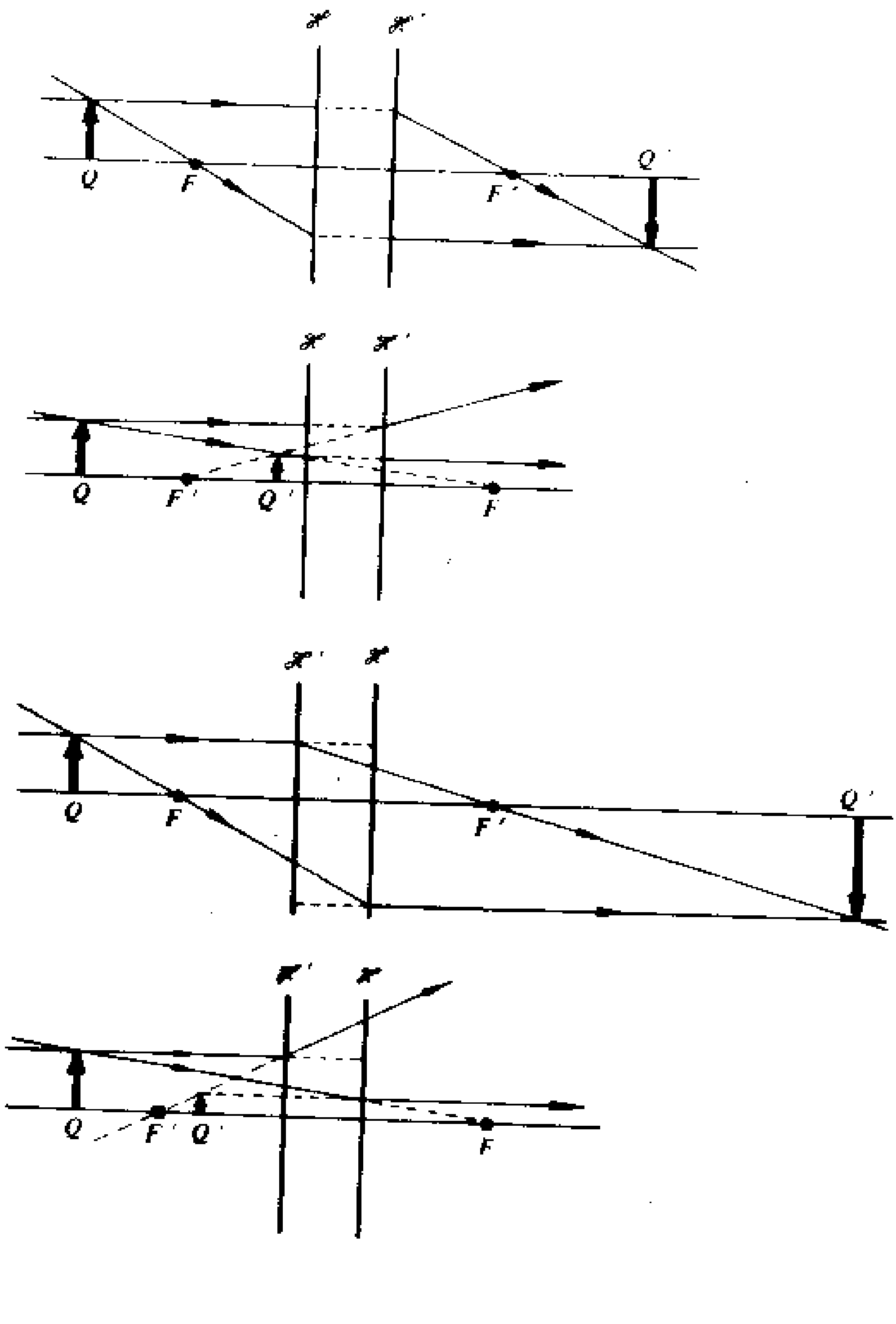
解 分别用作图法求得Q点的象为Q'，如附图所示。

2． 如图所示，已知光具组的主面和焦点，用作图法求PQ的象（入射线从左到右）。

解 如图所示，作图得PQ的象为$P'Q'$。

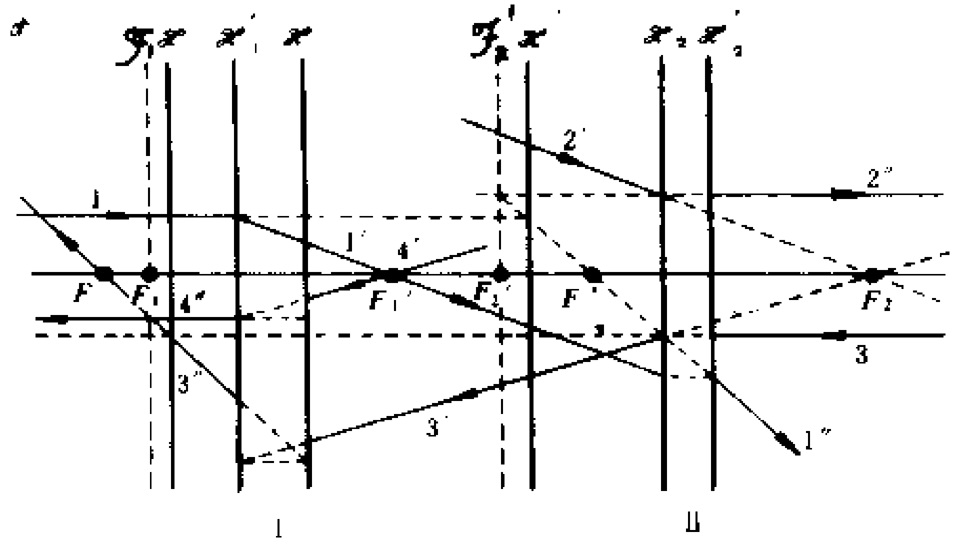


题 2 图



题 1 图

3． 附图所示的联合光具组中，已知光具组 I 的主面为 $\mathscr{H}_1$，$\mathscr{H}_1'$，焦点为 F_1，F_1'；光具组 II 的主面为 $\mathscr{H}_2$，$\mathscr{H}_2'$，焦点为 F_2，F_2'。用作图法求联合光具组的主面和焦点。



题 3 图

解 如附图所示，作图得 $\mathscr{H}$，$\mathscr{H}'$ 和 F，F' 即分别为该联合光具组的主面和焦点。作图步骤简述如下：

（1） 作光线1平行光轴，则过光具组 I 后的共轭光线1′必过 F_1'；

（2） 过 F_2' 作光具组II的象方焦面 $\mathscr{F}_2'$，过 F_2 作辅助光线 2′ 平行于1′，则过光具组 II 后的共轭光线 2″与 1″必交于 $\mathscr{F}_2'$ 上一点，光线 1 与光线 1″的交点决定的平面 $\mathscr{H}'$ 即为联合光具组的象方主面，光线 1″与光轴的交点 F' 即为联合光具组的象方焦点。

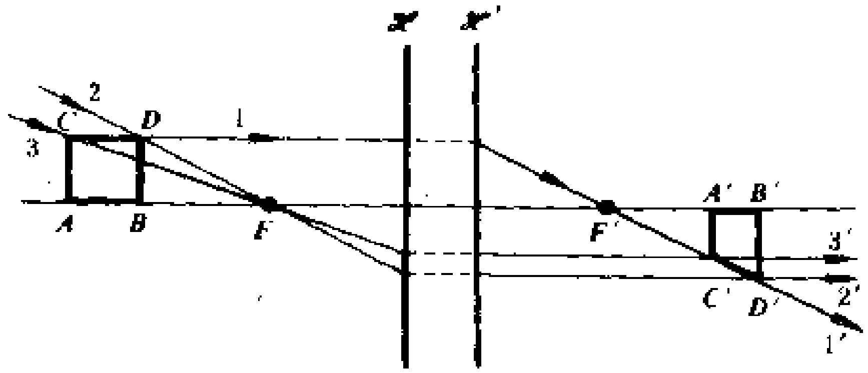
（3） 令光线从右到左入射，作光线 3 平行光轴，则过光具组 II 后的共轭光线 3′必过 F_2；

（4） 过 F_1 作光具组 I 的物方焦面 $\mathscr{F}_1$（相对于入射线从右到左时为象方焦面），过 F_1' 作辅助光线4′平行于3′，则过光具组 I 后的共轭光线4″与3″必交于 $\mathscr{F}_1$ 上一点。光线 3 与3″的交点决定的平面 $\mathscr{H}$ 即为联合光具组的物方主面，光线 3″与光轴的交点 F 即为联合光具组的物方焦点。

4． 如图所示，已知光具组的主面和焦点，用作图法求正方

形 $ABCD$ 的象。

解 如附图所示，作图得 $A'B'C'D'$ 为正方形 $ABCD$的象。



题 4 图

5. （1）试用公式计算冉斯登目镜（f_1 ： f_2 ： d = 1∶1∶1）的主面和焦点的位置；

（2）试用公式计算改进型冉斯登目镜（f_1 ： f_2 ： d = 1∶1∶2/3）的主面和焦点位置。

解 （1）按题意可令

$$f_1 = f_1' = f_2 = f_2' = d$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = -d$$

由光具组联合公式得目镜焦距

$$f = f' = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = d$$

主面位置

$$x_H = x_H' = f_1 \frac{d}{\Delta} = -d$$

即$\mathscr{H}$在向场镜 L_1 之右 d 处，正好与接目镜 L_2 重合。$\mathscr{H}'$在 L_2 之左 d 处，正好与透镜 L_1 重合。同时焦点 F、F' 也正好落在两个透镜的光心位置。这些结果与精确绘图所得结果是一致的。

（2）可令

$$f_1 = f_1' = f_2 = f_2' = \frac{3}{2}d$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = -2d$$

因此

$$x_H = x_{H'}' = -\frac{3}{4}d$$

$$f = f' - \frac{9}{8}d$$

即$\mathscr{H}$在L_1之右$3d/4$处，$\mathscr{H}'$在L_2之左$3d/4$处；F在$\mathscr{H}$之左$9d/8$处，F'在$\mathscr{H}'$之右$9d/8$处，这与精确作图所得结果一致。

6．求下列厚透镜的焦距和主面、焦点的位置，并作图表示。已知玻璃的折射率为1.500，两界面顶点间的距离为1.00 cm，透镜放在空气中。

序号	形状	r_1（cm）	r_2（cm）
（1）	双凸	10.0	10.0
（2）	凸凹	10.0	20.0
（3）	凹凸	−15.0	20.0

解 厚透镜是两个折射球面组成的光具组。在傍轴条件下，这两个折射球面能很好成象，且主点H_1、H_1'和H_2，H_2'分别与前后两个球面的顶点重合。设前后两个折射球面的焦距分别为f_1，f_1'和f_2，f_2'。取空气的折射率为$n_0 = 1.00$，则

（1）
$$f_1 = \frac{n_0 r_1}{n_L - n_0} = 20.0\ \text{cm}$$

$$f_1' = \frac{n_L r_1}{n_L - n_0} = 30.0\ \text{cm}$$

$$f_2 = \frac{n_L r_2}{n_0 - n_L} = 30.0\ \text{cm}$$

$$f_2' = \frac{n_0 r_2}{n_0 - n_L} = 20.0\ \text{cm}$$

两个折射面的光学间隔

$$\Delta = \overline{F_1' F_2} = d - f_1' - f_2 = -59.0\ \text{cm}$$

利用理想光具组的联合公式，得厚透镜系统的焦距为

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = 10.2\ \text{cm}$$

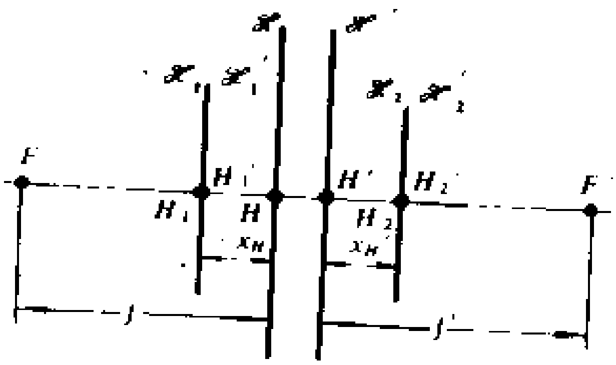
$$f' = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta} = 10.2\ \text{cm}$$

主点位置

$$x_H = \overline{H_1 H} = f_1 \frac{d}{\Delta} = -0.34\text{cm}$$

$$x_{H'} = \overline{H_2' H'} = f_2' \frac{d}{\Delta} = -0.34\text{cm}$$

即物方主面 $\mathscr{H}$ 在 H_1 之右 0.34 cm 处，象方主面 $\mathscr{H}'$ 在 H_2' 之左0.34 cm 处。物方焦点 F 在物方主点 H 之左10.2 cm 处，象方焦点 F' 在象方主点 H' 之右10.2 cm 处，如附图（a）所示。



题 6 图（a）

（2）

$$f_1 = \frac{n_0 r_1}{n_L - n_0} = 20.0\ \text{cm}$$

$$f_1' = \frac{n_L r_1}{n_L - n_0} = 30.0\ \text{cm}$$

$$f_2 = \frac{n_L r_2}{n_0 - n_L} = -60.0\ \text{cm}$$

$$f_2' = \frac{n_0 r_2}{n_0 - n_L} = -40.0\ \text{cm}$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = 31.0\ \text{cm}$$

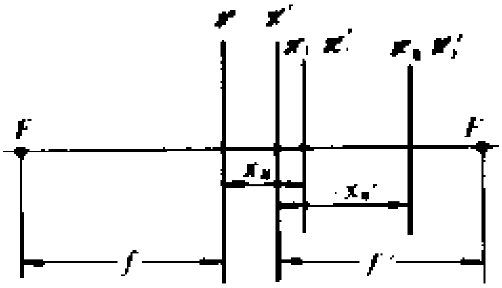
因此

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = 38.7\ \text{cm}$$

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta} = 38.7\ \text{cm}$$

$$x_H = f_1 \frac{d}{\Delta} = 0.65\ \text{cm}$$

$$x_{H'} = -f_2' \frac{d}{\Delta} = 1.29\ \text{cm}$$



题 6 图（b）

主面、焦点位置如图（b）所示。

（3）

$$f_1 = \frac{n_0 r_1}{n_L - n_0} = -30.0\ \text{cm}$$

$$f_1' = \frac{n_L r_1}{n_L - n_0} = 45.0\ \text{cm}$$

$$f_2 = \frac{n_L r_2}{n_0 - n_L} = 60.0\ \text{cm}$$

$$f_2' = -\frac{n_0 r_2}{n_0 - n_L} = 40.0\ \text{cm}$$

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = -14.0\ \text{cm}$$

因此

$$f = \frac{f_1 f_2}{\Delta} = -128.6\ \text{cm}$$

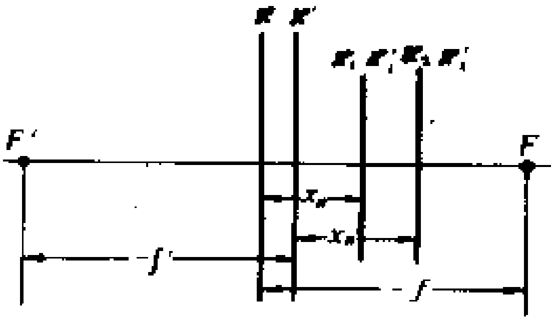
$$f' = \frac{f_1' f_2'}{\Delta} = 128.6\ \text{cm}$$

$$x_H = f_1 \frac{d}{\Delta} = 2.14\ \text{cm}$$

$$x_{H'} = f_2' \frac{d}{\Delta} = -2.86\ \text{cm}$$

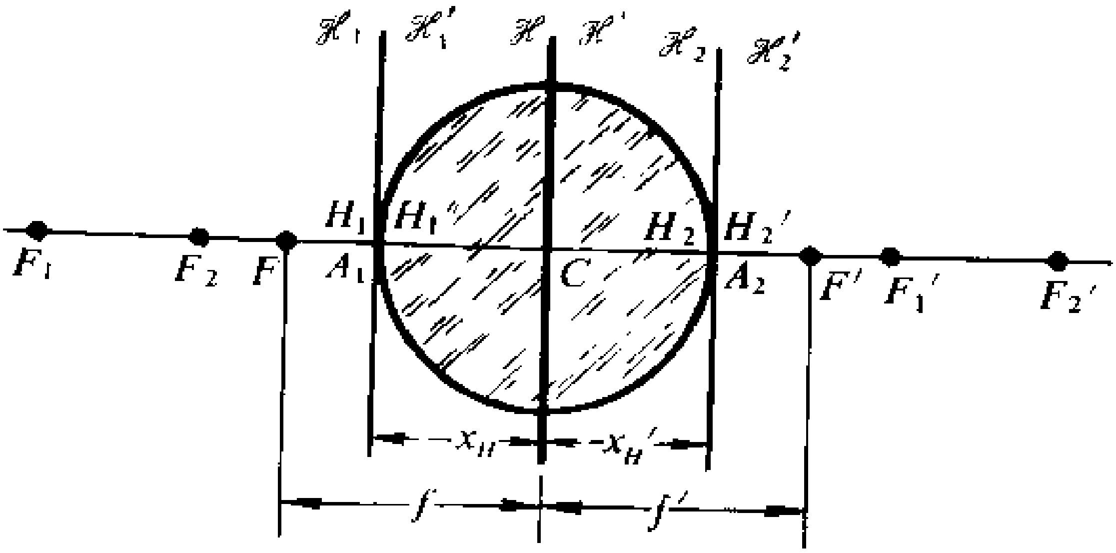
主面、焦点位置如图（c）所示。

7. 求放在空气中玻璃球的焦距和主面、焦点的位置，并作图表示。已知玻璃球的半径为2.00 cm，折射率为1.500。



题 6 图（c）

解　在傍轴条件下，玻璃球是由两个折射成象球面组成的共轴光具组。如图所示 H_1，H_1' 与 A_1 重合，H_2，H_2' 与 A_2 重合，且 $r_1=\overline{A_1C}=2.00\ \text{cm}$，$r_2=-\overline{CA_2}=-2.00\ \text{cm}$。先求出单球面的焦距分别为



题 7 图

$$f_1=4.00\ \text{cm}$$
$$f_1'=6.00\ \text{cm}$$
$$f_2=6.00\ \text{cm}$$
$$f_2'=4.00\ \text{cm}$$

而且

$$\Delta=-\overline{F_1'F_2}=-8.00\ \text{cm}$$
$$d=\overline{A_1A_2}=4.00\ \text{cm}$$

因此

$$f=-\frac{f_1f_2}{\Delta}=3.00\ \text{cm}$$

$$f'=-\frac{f_1'f_2'}{\Delta}=3.00\ \text{cm}$$

$$x_H = f_1 \frac{d}{\Delta} = -2.00\ \text{cm}$$

$$x_H' = f_2' \frac{d}{\Delta} = 2.00\ \text{cm}$$

即$\mathscr{H}$在 A_1 之右2.00cm处，$\mathscr{H}'$在 A_2 之左2.00 cm处。F在 A_1 之左1.00 cm处，F'在 A_2 之右1.00 cm处，其位置分别标于附图。由此可见 H 和 H' 重合，均在球心 C 处。

8. 上题中玻璃球面上有一斑点，计算从另一侧观察此斑点象的位置和放大率，并用作图法验证之。

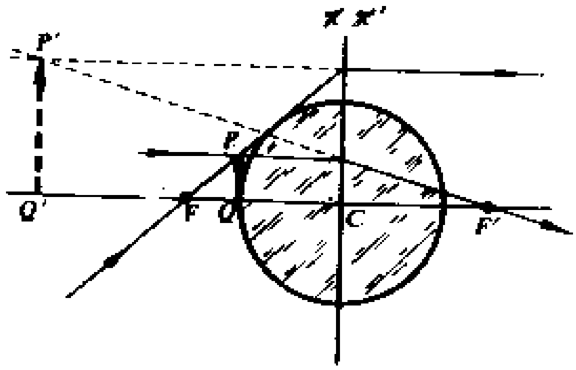
解 把玻璃球看作一个光具组。根据上题的结果，按题意物距 $s = 2.00$ cm 。代入高斯公式得象距

$$s' = 6.00\ \text{cm}$$

放大率为

$$V = -\frac{s'}{s} = 3.00$$

作图法验证如图。



题 8 图

9. （1）如图所示，已知光具组的主面和焦点，用作图法求光线 1 的共轭线；

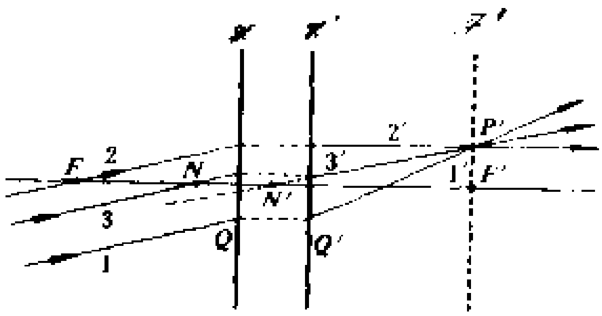
（2）在图上标出光具组节点 N，N' 的位置。

解 如图所示，先过 F' 作象方焦面$\mathscr{F}'$。

（1）过 F 作光线 2 平行于光线 1，则光线 2 的共轭光线 2′与光线 1 的共轭光线 1′必交于$\mathscr{F}'$上某一点 P'。入射线 1 与$\mathscr{H}$面交点为 Q，在$\mathscr{H}'$面上取等高点 Q'，则连接 Q'，P'的光线 1′便是光

线 1 的共轭光线。

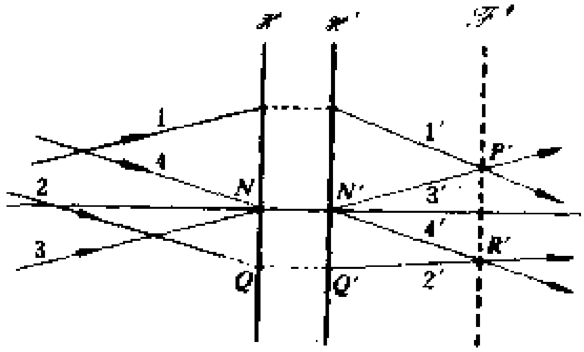
（2）如图所示，过 P' 点作平行于光线 2 的光线 3′与光轴相交一点，即为象方节点 N'，再作 3′的共轭光线 3，它与光轴的交点即为物方节点 N。



题 9 图

10. 如图所示，已知光具组的主面和节点，1—1′是一对共轭光线，求光线 2 的共轭光线。

解 如图所示，先找系统的后焦面。为此，过 N 点作光线 3 平行 1，其共轭光线 3′过 N' 点且与光线 3 平行，3′与 1′的交点 P' 必在焦面 $\mathscr{F}'$ 之中。作光线 4 平行 2，其共轭光线 4′与 $\mathscr{F}'$ 面交于 R' 点。入射光线 2 交 $\mathscr{H}$ 面于 Q，在 $\mathscr{H}'$ 面上取等高点 Q'。那么，连接 Q'、R' 的光线 2′必定是入射光线 2 的共轭光线。



题10图

***11.** 对一光具组，测得当物距改变 Δx 时，象距改变 $\Delta x'$，同时横向放大率由 V_1 变到 V_2，试证明此光具组的焦距为

$$f=\frac{\Delta x}{\dfrac{1}{V_1}-\dfrac{1}{V_2}},\quad f'=\frac{\Delta x'}{V_1-V_2}$$

（这里提供了一种测焦距的方法，它与测焦点位置的方法配合起

来，可以确定光具组的主面）。

证 由横向放大率公式

$$V=-\frac{f}{x}=-\frac{x'}{f'}$$

得

$$V_1=-\frac{f}{x_1}=-\frac{x_1'}{f'}\quad,\quad V_2=-\frac{f}{x_1+\Delta x}=-\frac{x_1'+\Delta x'}{f'}$$

所以

$$\frac{1}{V_2}-\frac{1}{V_1}=-\frac{\Delta x}{f}\quad,\qquad V_2-V_1=-\frac{\Delta x'}{f'}$$

即

$$f=\frac{\Delta x}{\dfrac{1}{V_1}-\dfrac{1}{V_2}}\ ,\qquad f'=\frac{\Delta x'}{V_1-V_2}$$

应注意上述两个公式中的 Δx，$\Delta x'$ 是含有正负号的，实验时应按标尺的同一方向为坐标来读数。

§8　光学仪器

1．一架幻灯机的投影镜头焦距为 7.5 cm，当幕由 8m 移至 10m 远时，镜头需移动多少距离？

解 由物象距关系的牛顿公式

$$x_1=\frac{f^2}{x_1'},\quad x_2=\frac{f^2}{x_2'}$$

得物位移量 Δx 与象位移量 $\Delta x'$ 的关系为

$$\Delta x=x_2-x_1=-\frac{\Delta x'}{x_2'x_1'}f^2$$

考虑到投影系统的特点是象距远远大于焦距，取近似

$$x_1'\approx s_1'=8\text{ m}$$

$$x_2'\approx s_2'=10\text{m}$$

则　$\Delta x'=x_2'-x_1'\approx s_2'-s_1'=2\text{m}$

所以　$\Delta x=-0.014\text{ cm}$

即投影镜头应移近画片0.014 cm。

2．　某照相机可拍摄物体的最近距离为1 m，装上2屈光度的近拍镜后，能拍摄的最近距离为多少？（假设近拍镜与照相机镜头是密接的。）

解　用二次成象概念分析，在象平面（底板最远位置）不变的条件下，先后两次的物象关系应当是：相对近拍镜来说，近拍物距s所对应的象距正是无近拍镜时的近拍距离s'，按题意$s' = -1$m，$P = 2\ \mathrm{m}^{-1}$。由高斯公式得

$$s = -\frac{s'}{Ps'-1} = \frac{1}{3}\mathrm{m}$$

*3．　某人对2.5 m以外的物看不清，需配多少度的眼镜？另一个人对1 m以内的物看不清，需配怎样的眼镜？

解　对2.5 m以外的物看不清者，其远点在2.5 m远处，当为近视眼，应配发散镜，使无穷远之物成象于2.5 m处，这相当于此发散镜的焦距为

$$f_1 = -2.5\ \mathrm{m}$$

商品度数为

$$P_1 = \frac{1}{f_1} = -0.4\ 屈光度 = -40度$$

对1 m以内物看不清者，即其近点在1 m处，当为远视眼，应配会聚镜，使明视距离0.25m之物成象于1m处。由高斯公式算出

$$f_2 = \frac{1}{3}\mathrm{m}$$

商品度数为

$$P_2 = \frac{1}{f_2} = 3\ 屈光度 = 300\ 度$$

*4．　计算2×，3×，5×，10×放大镜或目镜的焦深。

解　放大镜（或目镜）的工作距离是要使得物体处在第一焦点附近稍靠里一些的小范围内，这样才能形成一个明视距离s_0以

远的放大虚象供正常人眼观察。所谓“焦深”就是指的上述小范围的纵向间隔 Δx；此值也正是与明视距离相对应的物距。令象距 $x' = -(S_0 + f)$，由牛顿公式得

$$x = -\frac{f^2}{x'} = -\frac{f^2}{s_0 + f}$$

须知视角放大率 $M = s_0/f$，替换上式中的焦距 f 得

$$x = -\frac{s_0}{M(M+1)}$$

焦深

$$\Delta x = |x| = \frac{s_0}{M(M+1)}$$

由此算出

$$M = 2\times，\ \Delta x = 4.17\text{cm}$$
$$M = 3\times，\ \Delta x = 2.08\text{cm}$$
$$M = 5\times，\ \Delta x = 0.83\text{cm}$$
$$M = 10\times，\ \Delta x = 0.23\text{cm}$$

由此可见，高倍放大镜或目镜的焦距很短，焦深也随之缩短，要求实验调节更要精细。

5. 一架显微镜，物镜焦距为 4 mm，中间象成在物镜象方焦点后面160 mm处，如果目镜是20×的，显微镜的总放大率是多少？

解 物镜的横向放大率为

$$V_0 = -\frac{x_0'}{f_0} = -\frac{160}{4} = -40$$

显微镜的总放大率为

$$M = V_0 M_E = -40\times 20 = -800$$

6. 一架显微镜的物镜和目镜相距20.0cm，物镜焦距7.0mm，目镜焦距5.0mm。把物镜和目镜都看成是薄透镜，求：

（1）被观察物到物镜的距离；

（2）物镜的横向放大率；

（3）显微镜的总放大率；

（4）焦深。

解 （1）显微镜的工作距离应使小物成放大的实象（中间象）于目镜第一焦点附近（靠里一些），故按题意此显微镜中间象对物镜的距离为

$$s'_0 = 200 - 5.0 = 195\,\text{mm}$$

由高斯公式求得小物到物镜的距离为

$$s_0 = 7.3\,\text{mm}。$$

（2）物镜的横向放大率为

$$V_0 = -\frac{s'_0}{s_0} = -26.7 \approx -27\text{倍}$$

（3）显微镜的总（角）放大率可取物镜横向（线）放大率与目镜（角）放大率之乘积，而目镜的（角）放大率 M_e 等于明视距离除以目镜焦距。

$$M_e = \frac{250}{5} = 50\text{倍}$$

所以

$$M = V_0 M_e = (-26.7) \times 50 = -1335\text{倍}$$

（4）目镜的焦深（参见4题解）为

$$\Delta x_e = \frac{250\,\text{mm}}{M_e(M_e + 1)} \approx 0.1\,\text{mm}$$

与此相应的物镜焦深可通过牛顿公式微分运算（取绝对值）求得

$$x_0 x'_0 = f_0^2$$

$$\Delta x_0 = \frac{f_0^2}{x'^2_0}\Delta x'_0 = \frac{f_0^2}{x'^2_0}\Delta x_e$$

以 $f_0 = 7$ mm，$\Delta x_e = 0.1$ mm，$x'_0 = s'_0 - f_0 = 188$ mm代入算出

$$\Delta x_0 = 0.0001\,\text{mm}$$

焦深几乎为零，这说明在目镜位置（相对镜筒）固定的情况下，

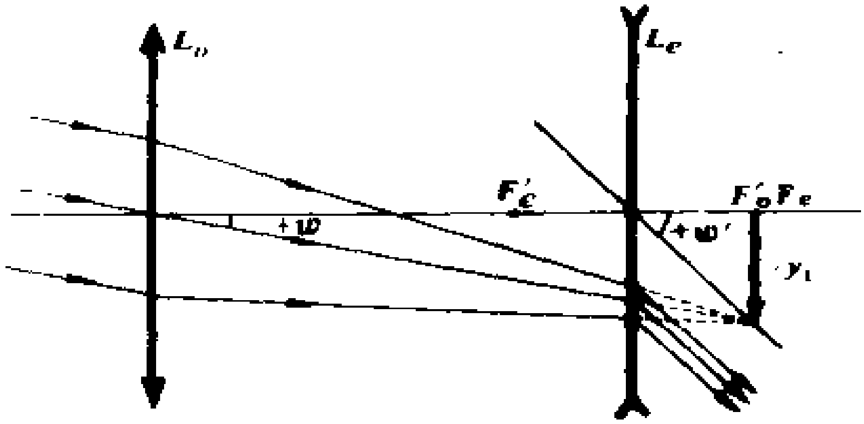
显微镜的工作距离（物镜头与小物之间的距离）被严格确定，几乎没有什么调节余地。

7．物镜、目镜皆为会聚的望远镜称为开普勒望远镜；物镜会聚而目镜发散的望远镜称为伽里略望远镜．

（1）画出伽里略望远镜的光路；

（2）一伽里略型望远镜的物镜和目镜相距12cm．若望远镜的放大率为 4 ×，物镜和目镜的焦距各为多少？

解　（1）伽里略型望远镜的光路如附图所示．



题 7 图

（2）望远镜的角放大率

$$M = -\frac{f_o}{f_e}$$

再考虑到筒长

$$d = f_o + f_e$$

解得

$$f_o = \frac{M}{M-1}d$$

$$f_e = -\frac{d}{M-1}$$

以 $M = +4$，$d = 12$ cm 代入算出此望远镜物镜和目镜的焦距分别为　$f_o = 16$ cm、$f_e = -4$ cm

8． 拟制一个 3 × 的望远镜，已有一个焦距为50 cm 的物镜，问在（1）开普勒型（2）伽里略型中目镜的光焦度以及物镜、目镜的距离各为多少？

解 （1）按题意在开普勒型望远镜中应取 $M = -3$，由物镜焦距 $f_0 = +50$ cm 可以算出目镜焦距

$$f_e = \frac{f_0}{M} = 17 \text{ cm}$$

焦度

$$P_e = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{0.17 \text{ m}} = +6 \text{ 屈光度}$$

望远筒长

$$d = 50 + 17 = 67 \text{ cm}$$

（2）按题意在伽里略型望远镜中应取 $M = +3$，由此算出

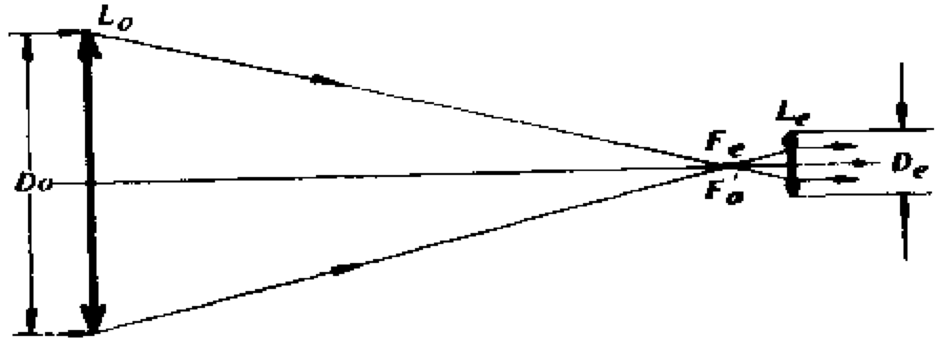
$$f_e = -17 \text{ cm}$$

$$P_e = -6 \text{ 屈光度}$$

$$d = 50 + (-17) = 33 \text{ cm}$$

§9 光 阑

1． 一望远镜的物镜直径为5.0 cm，焦距为20 cm，目镜直径为1.0cm,焦距为2.0 cm．，求此望远镜的入射光瞳和出射光瞳的位置和大小。



题 1 图

解 如图所示，由几何关系易得孔径光阑即为物镜L_o的边框。所以入射光瞳即为物镜本身。出射光瞳为物镜对目镜在象方的共轭象。由高斯公式得

$$-\frac{1}{s'_e}+\frac{1}{22}=-\frac{1}{2.0}$$

解得

$$s'_e=2.2\ \text{cm}$$

即出射光瞳的位置在目镜后2.2cm处。由横向放大率公式

$$V_e=-\frac{s'_e}{s_e}=-\frac{2.2}{22}=-0.1$$

所以出射光瞳的直径为

$$D'=D_o\left|V_e\right|=5.0\times0.1=0.5\,\text{cm}=5.0\,\text{mm}$$

*2． 望远镜的孔径光阑和入射光瞳通常就是其物镜的边缘。求出射光瞳的位置，并证明出射光瞳直径D'与物镜直径D_o之关系为

$$D'=\frac{D_o}{|M|},$$

式中$M=-\dfrac{f_o}{f_e}$是望远镜的视角放大率

解 （1）出射光瞳为物镜（孔径光阑）对目镜所成的象，此时物距$s=f_o+f_e$，由高斯公式求得象距（出射光瞳与目镜的距离）

$$s'=\left(1+\frac{f_e}{f_o}\right)f_e$$

$$\approx f_e\qquad(f_o\gg f_e).$$

（2）设物镜直径为D_o，出射光瞳直径为D'，在目镜与物镜的前后焦点重合的情况下，由作图法提供的相似三角形的比例关系很容易说明

$$\frac{D_o}{D'}=\frac{f_o}{f_e}$$

又

$$M = -\frac{f_o}{f_e}$$

则得

$$D' = \frac{D_o}{|M|}$$

3． 将望远镜倒过来可作激光扩束之用。设一望远镜的物镜焦距30 cm，目镜焦距1.5 cm，它能使激光束的直径扩大几倍？

解 这时通过望远镜出射光瞳的激光束都能通过入射光瞳，由题 2 可知

$$\frac{D_o}{D'} = |M| = \frac{f_o}{f_e} = 20$$

使用这台倒望远镜时，激光束直径扩大了20倍。

* 4． 显微镜的孔径光阑和入射光瞳通常是其物镜的边缘。求出射光瞳的位置，并证明在傍轴近似下出射光瞳的直径 D' 与入射孔径角 u_0 的关系是

$$D' \approx \frac{2 s_0 n u_0}{|M|}$$

式中 $s_0 = 25$cm是明视距离，M 是显微镜的视角放大率，n 是物方折射率。

解 （1）出射光瞳为物镜（孔径光阑）对目镜所成的象，由高斯公式得出射光瞳离目镜的距离（象距）

$$s' = \left(1 + \frac{f_e}{f_o' + \Delta}\right) f_e$$

$$\approx f_e \quad (\Delta \gg f_e)$$

式中 $\Delta = \overline{F_o' F_e}$ 为显微镜的光学筒长。

（2）以物镜为物，目镜的横向放大率为

$$V_e = -\frac{f_e}{f_o' + \Delta}$$

故出射光瞳的直径为

$$D'=V_e D=-\frac{f_e}{f_0'+\Delta}D$$

式中 D 为物镜直径，在傍轴条件下

$$D\approx 2f_0u_0$$

改写 D' 为

$$D'=-\frac{f_0 f_e}{f_0'+\Delta}2u_0$$

考虑到显微镜总的（角）放大率

$$M=-\frac{s_0\Delta}{f_0' f_e}$$

再改写 D' 为

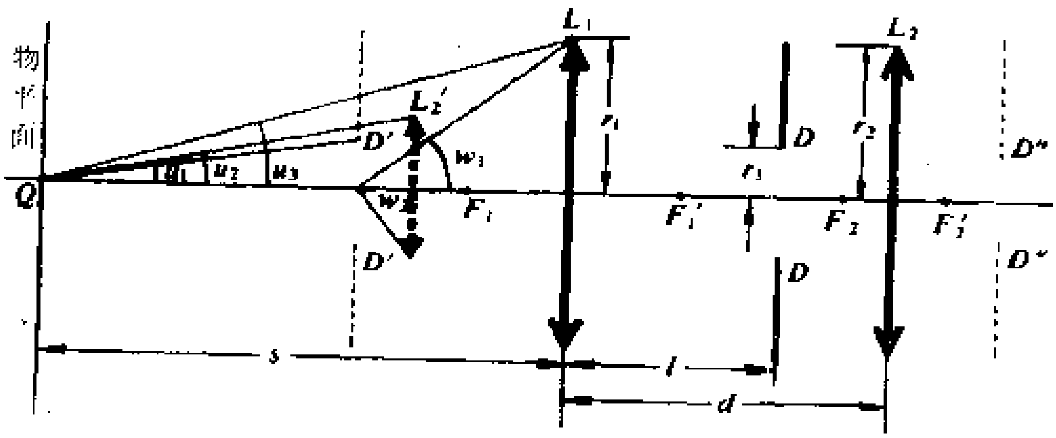
$$D'=\frac{f_0}{f_0'}\frac{\Delta}{f_0'+\Delta}\frac{2s_0u_0}{M}$$

考虑到

$$\frac{f_0}{f_0'}=n,\quad \frac{\Delta}{f_0'+\Delta}\approx 1$$

最后得

$$D'\approx\frac{2ns_0u_0}{M}$$



题 5 图

凡是显微镜中的问题，应注意到它的特点是短焦距，筒长远远大于焦距值；它工作于齐明点时，对物镜来说满足阿贝正弦条件。

5．附图中L_1，L_2是两个会聚透镜，Q是物点，DD是光阑，已知焦距$f_1=2a$，$f_2=a$，图中标示各距离为$s=10a$，$l=4a$，$d=6a$，此外透镜与光阑半径之比是$r_1=r_2=3r_3$，求此光具组的孔径光阑、入射光瞳、出射光瞳、入射窗和视场光阑的位置和大小。

解 （1）确定孔径光阑、入射光瞳和出射光瞳。

先将DD对L_1成象到系统物空间去。这时$s=l=4a$，求得

$$s'=\frac{sf_1}{s-f_1}=\frac{4a\times 2a}{4a-2a}=4a$$

$$V=-\frac{s'}{s}=-\frac{4a}{4a}=-1$$

$$r_3'=r_3\,|V|=r_3$$

式中r_3'为DD的象$D'D'$的半径（如图）。

再将L_2对L_1成象到系统的物空间去。这时$s=d=6a$，求得

$$s'=\frac{sf_1}{s-f_1}=\frac{6a\times 2a}{6a-2a}=3a$$

$$V=-\frac{s'}{s}=-\frac{3a}{6a}=-\frac{1}{2}$$

$$r_2'=r_2\,|V|=\frac{1}{2}r_2=\frac{3}{2}r_3$$

式中r_2'为L_2的象L_2'（如图）的半径。

现在比较$D'D'$，L_2'，L_1对轴上物点Q的张角u_1，u_2，u_3的大小：

$$\mathrm{tg}\,u_1=\frac{r_3'}{10a-4a}=\frac{1}{6}\frac{r_3}{a}$$

$$\mathrm{tg}\,u_2=\frac{r_2'}{10a-3a}=\frac{3}{14}\frac{r_3}{a}$$