目　　录

第一章　信号与系统的基本概念

基　础　篇

第一节　重点、难点和考点

一、重点

1．信号及信号的分类

(1) 了解信号、消息、信息和函数的概念。

(2) 了解信号处理、信号传输和信号交换的概念和目的。

(3) 掌握两种信号描述方法，即函数表达式描述(包括分段函数)和图形描述。

(4) 理解确定信号与随机信号的概念；区分周期信号与非周期信号。了解下列两种信号的概念：伪随机信号是周期很长的确定信号；混沌信号是貌似随机而遵循严格规律产生的信号。

(5) 掌握连续时间信号与离散时间信号的定义和描述方法，区分模拟信号、连续时间离散幅度信号、抽样信号和数字信号。

(6) 区分能量信号与功率信号。注意除能量信号和功率信号外，存在既非能量信号又非功率信号。

(7) 区分偶信号与奇信号。

(8) 了解调制信号、载波信号与已调信号。了解一维信号与多维信号；了解实数信号与复数信号。

2．典型连续时间信号和奇异信号

(1) 了解实指数信号、双边指数脉冲和衰减单边指数信号的定义。注意时间常数对信号的影响。

(2) 了解正弦信号、衰减正弦信号和复指数信号的定义。注意各个参数的含义及其对信号的影响。

(3) 掌握抽样函数($\mathrm{Sa}(t)$信号)的定义与特性，包括极值点和零点的位置以及重要的积分性质。

(4) 了解高斯函数(钟型信号)的定义和积分特性。

(5) 掌握单位斜变信号 $\gamma(t)$的定义，注意如何用它来表示延迟的单位斜变信号、截平的斜变信号和三角形脉冲信号。

(6) 掌握单位阶跃信号 $u(t)$的定义，并用它来描述信号的单边特性或时间窗，例如延迟的阶跃信号、矩形脉冲信号 $R_\tau(t)$和对称矩形脉冲信号 $G_\tau(t)$。掌握

它与单位斜变信号的关系。

(7) 了解符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$ 的定义及其与 $u(t)$ 的关系。

(8) 掌握单位冲激信号 $\delta(t)$ 的狄拉克定义和广义极限定义。熟练掌握 $\delta(t)$ 的各种性质及其与 $u(t)$ 的关系。

(9) 利用三角脉冲的导数的极限来理解冲激偶信号 $\delta'(t)$ 的广义极限定义。熟练掌握 $\delta'(t)$ 的各种性质。

3. 连续时间信号的运算

(1) 熟练掌握横轴上的移位、反褶和尺度运算。

(2) 了解纵轴上的平移、翻转和倍乘运算。

(3) 了解微分和积分运算。理解微分作用在于突出图形的边缘轮廓，而积分作用在于削弱信号突变部分。

(4) 了解相加和相乘运算。

(5) 初步了解卷积（见第二章）和相关（见第三章）运算。

4. 连续时间信号的分解

(1) 掌握将信号分解为直流和交流分量的方法。了解交流分量平均值为 0 的特性及“平均功率 = 直流功率 + 交流功率”的结论。

(2) 掌握将信号分解为奇偶分量的方法。了解其奇偶特性、平均值特性及“平均功率 = 偶分量功率 + 奇分量功率”的特性。

(3) 了解将信号分解为冲激脉冲或阶跃信号分量的表达式。

(4) 了解信号的模、实部分量和虚部分量的关系。

(5) 了解信号内积的定义；了解正交、正交函数集和完备正交集的概念；掌握帕塞瓦尔方程和信号的正交分解。

5. 系统及系统的分类

(1) 系统、电路和网络的概念。

(2) 系统模型描述。数学表达式：微分方程、差分方程，状态方程。方框图：用相加、倍乘和积分三种基本单元描述。

(3) 区分连续时间系统、离散时间系统和混合系统。

(4) 区分即时（无记忆）系统和动态（有记忆）系统。

(5) 区分集总参数系统和分布参数系统。

(6) 重点掌握如何区分线性系统和非线性系统。

(7) 重点掌握如何区分时变系统和时不变系统。

(8) 重点掌握如何区分因果系统和非因果系统。

(9) 重点掌握如何区分稳定系统和不稳定系统。

(10) 区分可逆系统和不可逆系统。

(11) 了解反馈系统概念：输出端反馈并加入到系统输入端。

6. 线性时不变系统(LTI)（设激励为 $e(t)$，响应为 $r(t)$）

(1) 满足叠加性，即

$e_1(t) \to r_1(t)$ 且 $e_2(t) \to r_2(t) \Rightarrow e_1(t) + e_2(t) \to r_1(t) + r_2(t)$。

(2) 满足均匀性，即 $e(t) \to r(t) \Rightarrow ae(t) \to ar(t)$。

(3) 满足时不变特性，即 $e(t) \to r(t) \Rightarrow e(t-t_0) \to r(t-t_0)$。

(4) 满足微(积)分特性，即 $e(t) \to r(t) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \to \dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}$。

(5) 线性时不变系统常用线性常系数微(差)分方程描述。

(6) 线性时不变系统未必就满足因果性。

(7) 若 $t < t_0$ 不存在激励，且 t_0 起始状态为0，则线性常系数微分方程描述的系统满足因果性。

7. 系统分析与系统综合概念

(1) 系统分析：已知激励 $e(t)$ 和系统，求响应 $r(t)$。

(2) 系统综合：已知激励和响应，求系统。

(3) 关系：分析是综合的基础。

(4) 系统工程学：利用系统理论，设计和优化系统工程。

8. 系统分析方法

(1) 分析步骤：先建立数学模型，一般用框图或数学表达式描述；然后求解数学模型。通常已知数学模型和输入激励。

(2) 两种描述方法：输入-输出描述法和状态变量描述法。

(3) 三类分析方法：时域方法(经典、卷积、数值)、变换域方法(频域、复频域、Z域、FFT)和非线性方法(人工神经网、遗传算法、模糊理论)。

二、难点

1. 区分能量信号和功率信号

(1) 连续能量信号满足：$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t < +\infty$；离散能量信号满足：$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 < +\infty$。

(2) 连续功率信号满足 $0 < \overline{P} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 \mathrm{d}t < +\infty$；离散功率信号满足：$0 < \overline{P} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 < +\infty$。

2. 对连续时间信号进行移位、反褶和尺度等综合运算

例如：由 $f(at+b)$ 到 $f(ct+d)$ 需经过哪些操作？其中 a,b,c,d 均为常数。

3. 单位冲激信号的性质

首先需要掌握 $\delta(t)$ 的分配函数定义：赋予"检试函数"$\varphi(t)$ 以数 $\varphi(0)$，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi(t)\mathrm{d}t = \varphi(0)$ 的函数。延迟 t_0 的冲激函数 $\delta(t-t_0)$ 赋予"检试函数"

$\varphi(t)$以数 $\varphi(t_0)$，即$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\varphi(t)\mathrm{d}t=\varphi(t_0)$。掌握如下 10 条性质：

(1) 相加：$a\delta(t)+b\delta(t)=(a+b)\delta(t)$。

(2) 相乘：$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$，注意：$\delta(t)\cdot\delta(t)$无意义。

(3) 反褶：$\delta(-t)=\delta(t)$。

(4) 尺度特性：$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)(a\neq 0)$。

(5) 抽样特性：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)$。

(6) 时移抽样特性：$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)$。

(7) 卷积特性：$f(t)*\delta(t)=f(t)$；$f(t)*\delta(t-t_1)=f(t-t_1)$；$\delta(t)*\delta(t)=\delta(t)$；$\delta(t-t_1)*\delta(t-t_2)=\delta(t-t_1-t_2)$。

(8) 复合函数性质：设 $f(t)=0$ 有 n 个互不相等的实根$t_1,t_2,\cdots,t_n$ 且$f'(t_i)\neq 0$，则 $\delta[f(t)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)$。

(9) 积分特性：$\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t)$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t)=\delta(t)$。

(10) 微分特性：

1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=\delta(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t=-\varphi'(0)$；

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta^{(k)}\varphi(t)\mathrm{d}t=(-1)^k\varphi^{(k)}(0)$。

4. 冲激偶信号的性质

首先需要掌握 $\delta'(t)$的分配函数定义：赋予“检试函数”$\varphi(t)$以数$-\varphi'(0)$，即$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t)\varphi(t)\mathrm{d}t=-\varphi'(0)$的函数。延迟 t_0 的冲激偶信号 $\delta'(t-t_0)$赋予“检试函数”$\varphi(t)$ 以数 $-\varphi'(t_0)$，即$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta'(t-t_0)\varphi(t)\mathrm{d}t=-\varphi'(t_0)$。掌握如下 4 条特性：

(1) 奇函数：$\delta'(-t)=-\delta'(t)$。

(2) 相乘：$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$。

(3) 尺度：$\delta'(at)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{a}\delta'(t)$。

(4) 卷积：$f(t)*\delta'(t)=f'(t)$；$f(t)*\delta'(t-t_0)=f'(t-t_0)$。

5. 用方框图表示微分方程

(1) 利用三种基本单元符号：相加、倍乘和积分。

(2) 利用常系数线性微分方程的框图特点。

(3) 若方程右端(激励)有多项，则可利用线性时不变系统的线性特性和时不变特性。

6. 系统的线性、时不变特性、因果性和稳定性判断

7. 线性时不变系统概念的应用

三、考点

1. 信号的分类

(1) 区分模拟、连续时间离散幅度、抽样和数字信号。

(2) 区分周期和非周期信号。

(3) 区分能量和功率信号。

(4) 区分奇信号和偶信号，证明相关性质。

2. 信号的描述

(1) 用函数表达式(通常要用到 $u(t)$)表示波形图。

(2) 已知信号表达式，画出波形图。

(3) 已知某信号波形或表达式，画出乘奇异信号后的波形。

3. 求信号的周期、奇偶分量、交直流分量、能量或平均功率

(1) 求信号的最小正周期。

(2) 求信号的直流分量和交流分量。

(3) 求出或画出信号的奇分量和偶分量。

(4) 求信号的能量或平均功率。

4. 奇异信号的性质

(1) 利用 $u(t)$的含义化简表达式或证明等式。

(2) 利用 $\delta(t)$的各种性质化简表达式或证明等式。

(3) 利用 $\delta'(t)$的各种性质化简表达式或证明等式。

5. 信号的尺度、移位、反褶、求导和积分运算

(1) 已知原信号根据运算过程求结果信号。

(2) 已知原信号和结果信号求可能的几种运算过程。

(3) 求信号的取值区间随着运算的变化情况。

6. 系统的线性、时不变特性、因果性和稳定性判断

7. 系统框图与微分方程

(1) 已知框图写出微分方程。

(2) 已知微分方程画出相应框图。

8. 线性时不变系统特性及应用

(1) 证明线性时不变系统的一些特性。

(2) 已知某激励的响应，求该激励微分或积分的响应。

(3) 已知两种激励的响应，求对线性组合激励的响应。

9. 信号的正交分解

(1) 证明两个信号正交或其他正交特性。

(2) 求信号的正交分解形式或某一正交分量。

(3) 分析信号正交分量与原信号之间的功率特性。

第二节　巩固练习

1. 信号与消息是内容与形式的关系，其中______是______的内容。

2. 画出下列信号的波形：

(1) $\left[1+\frac{1}{2}\sin(\Omega t)\right]\sin(8\Omega t)$　　(2) $[u(t)-u(t-T)]\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$

(3) $(2-e^{-t})u(t)$　　(4) $u(t)-2u(t-1)+u(t-2)$

3. 利用单位阶跃信号 $u(t)$ 表示如图 1-1(a)(b)(c)所示的信号。

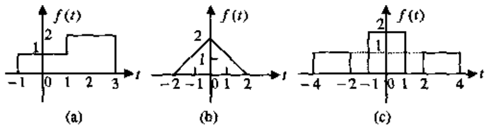

图 1-1

4. 判断下述论断是否正确：

(1) 若 $x(t)$ 是周期的，则 $x(2t)$ 也是周期的；

(2) 若 $x(2t)$ 是周期的，则 $x(t)$ 也是周期的；

(3) 若 $x(t)$ 是周期的，则 $x\left(\frac{t}{2}\right)$ 也是周期的；

(4) 若 $x\left(\frac{t}{2}\right)$ 是周期的，则 $x(t)$ 也是周期的。

5. 指出下列信号是否为周期信号？若为周期信号，其周期、直流分量和平均功率分别为多少？

(1) $x(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$　　(2) $x(t)=\cos\frac{\pi}{3}t+\sin\frac{\pi}{4}t$

(3) $x(t)=\sin^2 t$　　(4) $x(t)=\cos t+\sin\sqrt{2}t$

(5) $x(t)=|\cos\omega t|$　　(6) $x(t)=K(1+\sin\omega t)$

6. 选择题：$e^{-|t|}$，$u(t+3)$，$\sin(\pi n)$，$\cos(4n)$ 分别是_______信号，其中 n 为整数。

(A) 能量，功率，周期，抽样　　(B) 功率，能量，抽样，非周期

(C) 能量，功率，数字，数字　　(D) 功率，能量，数字，非周期

7. 判断下列信号是否是能量信号或功率信号，或两者都不是？

(1) $x(t)=e^{-at}u(t)$，$a>0$　　(2) $x(t)=A\cos(\omega_0 t+\theta)$

(3) $x(t)=tu(t)$

8. 奇信号乘偶信号为________信号；两个奇信号的乘积为________信号。

9. 证明下列等式：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\mathrm{d}t = 1$　　(2) $\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$

(3) $\sin t\delta(t)=0$　　(4) $t\delta'(t)=-\delta(t)$

10. 已知连续时间信号 $f(t)$ 如图 1-2 所示，画出下列信号波形图：

(1) $f(t)u(1-t)$　(2) $f(t)[u(t)-u(t-1)]$

(3) $f(t)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$

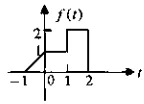

图 1-2

11. 计算下列各题：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t}[\delta'(t)-\delta(t)]\mathrm{d}t$　　(2) $\int_{-\infty}^{t}e^{-2\tau}[\delta'(\tau)-\delta(\tau)]\mathrm{d}\tau$

(3) $\int_{1}^{2}(3t^2+1)\delta(t)\mathrm{d}t$　　(4) $\int_{-1}^{1}(3t^2+1)\delta(t)\mathrm{d}t$

(5) $2t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\delta(t)\right]$　　(6) $\int_{-\infty}^{t}(1-\tau)\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau$

12. 已知连续时间信号 $x(t)$ 如图 1-3 所示，画出如下信号波形图：

(1) $x(t-2)$　(2) $x(2t)$　(3) $x\left(\frac{t}{2}\right)$　(4) $x(-t)$

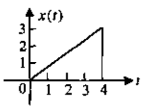

图 1-3

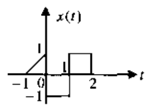

图 1-4

13. 已知信号 $f(t)$ 的波形如图 1-4 所示，画出信号 $y(t)=\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ 的波形并写出其表达式。

14. 求出信号 $x(t)=e^{jt}$ 的奇分量与偶分量。

15. 将下列信号展成如下形式：

$$x(t)=x_1(t)[u(t-t_1)-u(t-t_2)]+x_2(t)[u(t-t_2)-u(t-t_3)]+\cdots$$

要求给出信号 $x_1(t),x_2(t),\cdots$ 最简单的解析表达形式。

(1) $x(t)=u(t+1)-2u(t-1)+u(t-3)$

(2) $x(t)=(t+1)u(t-1)-tu(t)-u(t-2)$

(3) $x(t)=e^{-t}u(t)+e^{-t}[e^{(2t-4)}-1]u(t-2)-e^{t-4}u(t-4)$

(4) $x(t)=\cos t\left[u\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-2u(t-\pi)\right]+(\cos t)u\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$

16. $1,\ x,\ x^2,\ x^3$ 是否是区间 $(0,1)$ 上的正交函数集？

17. 绘出下列系统的仿真框图：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+a_0r(t)=b_0e(t)+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)$

(2) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}r(t)+a_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+a_0r(t)=b_0e(t)+b_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)$

18. 选择题：连续时间系统的输入 $e(t)$ 和输出 $r(t)$ 满足 $r(t)=e(t)\cos(2t)$，则该系统________________________。

(A) 无记忆、因果、时变、线性、稳定；

(B) 有记忆、因果、时不变、非线性、不稳定；

(C) 无记忆、非因果、时变、线性、稳定；

(D) 有记忆、时不变、线性、稳定。

19. 某 LTI 系统，当激励 $e_1(t)=u(t)$ 时，响应 $r_1(t)=e^{-\alpha t}u(t)$。试求当激励 $e_2(t)=\delta(t)$ 时，响应 $r_2(t)$ 的表示式(假定起始时刻系统无储能)。

20. 设 T 代表连续时间 LTI 系统，证明 $\mathrm{T}[e^{st}]=\lambda e^{st}$。

21. 试给出一个满足均匀性而不满足叠加性的系统。

22. 系统的两种常见描述方法是什么？它们各自有何特点？

提　高　篇

第一节　习 题 精 解

1. 分别判断图 1-5 所示各波形是连续时间信号还是离散时间信号，若是离散时间信号是否为数字信号？

思路和技巧　根据时间离散性区分连续时间信号和离散时间信号，对离散时间信号根据幅度离散性区分抽样信号和数字信号。

解　图(a) $f(t)$ 为连续时间信号，因为该信号的时间取值是连续的。而且该信号是幅值连续的连续时间信号。虽然部分点幅值有所跳变，但从整体来看幅值是连续的。故 $f(t)$ 为模拟信号。

图(b) $f(t)$ 为连续时间信号，因该信号时间取值连续。但该信号是幅值离散的连续时间信号。

图(c) $f(t)$ 为离散时间信号，因该信号时间取值离散。而且该信号是幅值离散的离散时间信号，即数字信号。

图(d) $f(t)$ 为离散时间信号，因为该信号的时间取值是离散的。而且该信号是幅值连续的离散时间信号，即抽样信号。

图(e) $f(t)$ 为离散时间信号，因为该信号的时间取值是离散的。而且该信号是幅值离散的离散时间信号，即数字信号。

图(f) $f(t)$为离散时间信号，因为该信号时间取值是离散的。而且该信号是幅值离散的离散时间信号，即数字信号。

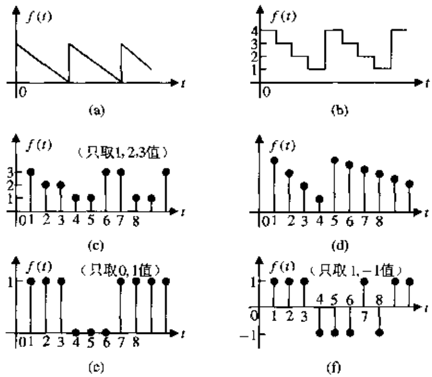

图 1-5

2．确定下面的信号是否是周期的，如果是周期的，找出其基本周期并计算其直流分量。

(1) $\cos 2\pi t+\sin 5\pi t$　　　(2) $\cos 2\pi t+\sin 2t$

(3) $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n[u(t-nT)-u(t-nT-T)]$ (n 为正整数)

思路和技巧　前两题利用结论"设 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的基本周期分别为 T_1 和 T_2，则 $x_1(t)+x_2(t)$是周期信号的条件是$\frac{T_1}{T_2}=\frac{k}{m}$为有理数($k$，$m$ 为互素正整数)，其周期满足 $T=mT_1=kT_2$"。最后一题则通过分析信号在不同区间内的取值情况来计算周期。利用公式 $\frac{1}{T}\int_0^T f(t+T)\mathrm{d}t\left(\text{或}\frac{1}{M}\sum\limits_{n=0}^{M-1}x(n)\right)$计算直流分量。

解　(1) $\cos 2\pi t$ 的周期为 $T_1=1$，$\sin 5\pi t$ 的周期为 $T_2=\frac{2}{5}$，$\frac{T_1}{T_2}=\frac{5}{2}$为有理数，故 $\cos 2\pi t+\sin 5\pi t$ 为周期信号，其周期为 $T=2T_1=5T_2=2$。

(2) $\cos 2\pi t$ 的周期为 $T_1=1$，$\sin 2t$ 的周期为 $T_2=\pi$，$\frac{T_1}{T_2}=\frac{1}{\pi}$为无理数，故 $\cos 2\pi t+\sin 2t$ 不是周期信号。

(3)容易证明该信号在区间$(2kT,(2k+1)T)$内取 1，而在区间$((2k+1)T,(2k+2)T)$内取 -1，即在 $2T$ 间隔内交替出现 1 和 -1，故信号周期为 $2T$。

3．求下列信号的能量和功率，判断是否是能量或功率信号。

(1) $e^{-|t|}$ (2) $u(t+3)$ (3) $\mathrm{Sa}(t)$ (4) $\mathrm{sgn}(t)$ (5) $2e^{t^2}$

思路和技巧 先计算能量 E，若为有限值则为能量信号。否则，计算功率 $\bar{P}$，若为有限值则为功率信号。否则，两者都不是。

解 (1) 能量 $E=\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-|t|})^2\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}e^{-2t}\mathrm{d}t=-e^{-2t}\Big|_0^{+\infty}=1$ 为能量信号，其功率为0。

(2) 能量 $E=\int_{\infty}^{+\infty}(u(t+3))^2\mathrm{d}t=\int_{-3}^{+\infty}1\mathrm{d}t=+\infty$ 为无穷大，功率 $\bar{P}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}-3}^{+\frac{T}{2}-3}(u(t+3))^2\mathrm{d}t=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-3}^{+\frac{T}{2}-3}1\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$ 为功率信号。

(3) 能量 $E=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{Sa}(t))^2\mathrm{d}t=2\int_0^{+\infty}\frac{(\sin t)^2}{t^2}\mathrm{d}t=\pi$（这里需利用傅里叶变换的性质）为能量信号，其功率为0。

(4) 能量 $E=\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{sgn}t)^2\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}1\mathrm{d}t=+\infty$ 为无穷大，功率 $\bar{P}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}(\mathrm{sgn}t)^2\mathrm{d}t=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}1\mathrm{d}t=1$ 为功率信号。

(5) 既非能量又非功率信号。能量 $E=\int_{-\infty}^{+\infty}(2e^{t^2})^2\mathrm{d}t=+\infty$，功率 $\bar{P}=\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}}(2e^{t^2})^2\mathrm{d}t=+\infty$。

4. 设任意信号 $x(t)$ 的奇偶部分分别用 $x_o(t)$ 和 $x_e(t)$ 表示。证明：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}x_o^2(t)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}x_e^2(t)\mathrm{d}t。$$

思路和技巧 充分利用奇信号和偶信号在对称区间内的积分特性求证。

证明 根据对称性容易证明奇信号满足：$\int_{-\infty}^{+\infty}x_o(t)\mathrm{d}t=0$。而奇信号与偶信号之积 $x_o(t)x_e(t)$ 为奇信号，故 $\int_{-\infty}^{+\infty}x_o(t)x_e(t)\mathrm{d}t=0$。从而

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)\mathrm{d}t&=\int_{-\infty}^{+\infty}x_o^2(t)\mathrm{d}t+2\int_{-\infty}^{+\infty}x_o(t)x_e(t)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}x_e^2(t)\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x_o^2(t)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{+\infty}x_e^2(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

证毕。

5. 求出图1-6所示各波形的函数表达式。

思路和技巧 充分利用单位阶跃信号 $u(t)$ 来描述分段函数。

解 (a) 该图相当于直线 $-\frac{1}{2}t+1$ 和直线 $\frac{1}{2}t+1$ 与横轴在区间 $[-2,2]$ 内

围成的三角波，可写成$\left(1-\frac{1}{2}|t|\right)[u(t+2)-u(t-2)]$。

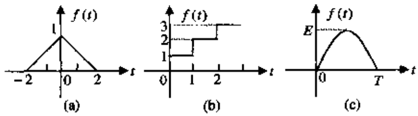

图 1-6

(b) 该图相当于阶跃信号 $u(t)$，$u(t-1)$ 和 $u(t-2)$ 的叠加，即波形可描述为 $u(t)+u(t-1)+u(t-2)$。

(c) 该图为正弦信号的半波，可写成 $\sin\frac{\pi}{T}\left[u(t)-u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right]$。

6. 绘出下列各信号的波形：

(1) $\left[1+\frac{1}{2}\sin(\Omega t)\right]\sin(8\Omega t)$　(2) $(5e^{-t}-5e^{-3t})u(t)$

(3) $[u(t)-2u(t-T)+u(t-2T)]\sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)$　(4) $\frac{d}{dt}[e^{-t}\sin tu(t)]$

(5) $f(t)=tu(2t-1)$　(6) $f(t)=tu(t)-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u(t-n)$

思路和技巧　对于不同频率信号相乘，相当于低频信号对高频信号的调制。对于超越函数，需先求出“三点一限”，即零点、驻点、拐点和间断点极限。对于由阶跃函数组合而成的信号，通常需分解为 $x_1(t)[u(t-t_1)-u(t-t_2)]+x_2(t)[u(t-t_2)-u(t-t_3)]$ 后画图。在画图时要充分利用基本连续时间信号的波形特点。

解　(1) 用低频信号对高频信号调制，如图 1-7(a) ~ (d) 所示。

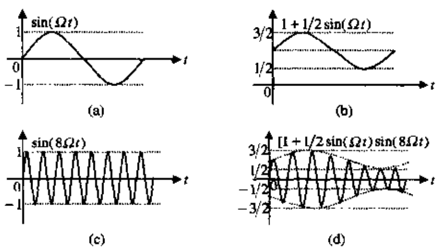

图 1-7

(2) $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}(5e^{-t} - 5e^{-3t})u(t) = 0$；$f(t) = 0(t < 0)$；当 $t > 0$，$f(t) > 0$，$f'(t) = -5e^{-t} + 15e^{-3t}$，令 $f'(t) = 0$，得驻点 $t = \ln 3$，函数值为 $f(\ln 3) = \frac{5}{3} - \frac{5}{27} = \frac{40}{27}$；当 $t > 0$ 时，$f''(t) = 5e^{-t} - 45e^{-3t}$，令 $f''(t) = 0$，解出拐点 $t = 2\ln 3$，相应函数值为 $f(2\ln 3) = \frac{400}{729}$。如图 1-8 所示。

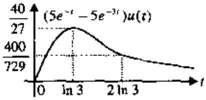

图 1-8

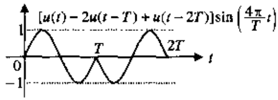

图 1-9

(3) 原式 $= \sin\left(\frac{4\pi}{T}t\right)[[u(t) - u(t-T)] - [u(t-T) - u(t-2T)]]$，故波形如图 1-9 所示。

(4) 先对表达式进行化简，波形如图 1-10 所示。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-t}\sin t u(t)] = e^{-t}(-\sin t + \cos t)u(t) = \sqrt{2}e^{-t}\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)u(t)$$

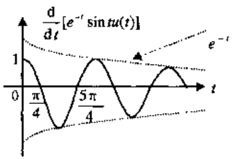

图 1-10

(5) 令 $f_1(t) = t, f_2(t) = u(2t-1)$

(a) 先画 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形，如图 1-11(a) 和 (b) 所示，其中 $u(2t-1)$ 的波形是将信号 $u(t-1)$ 的横坐标尺寸压缩 $\frac{1}{2}$ 得到的。

(b) 信号 $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$，其波形如图 1-11(c) 所示。

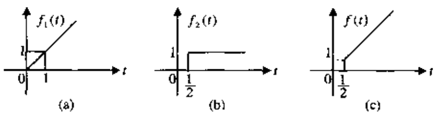

图 1-11

(6) 令 $f_1(t) = tu(t)$，

$$f_2(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(t-n) = u(t-1) + u(t-2) + \cdots$$

(a) 信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的波形，分别如图 1-12(a) 和(b) 所示。

(b) $f(t) = f_1(t) - f_2(t) = tu(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3) - \cdots$

$f(t)$ 的波形如图 1-12(c) 所示。

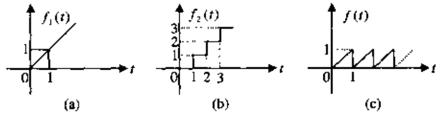

图 1-12

7. 画出下列各信号的波形(式中 $\gamma(t) = tu(t)$ 为斜升函数)：

(1) $f(t) = \gamma(2t)u(2-t)$　　(2) $f(t) = u(t)\gamma(2-t)$

(3) $f(t) = \text{sgn}(t^2-4)$　　(4) $f(t) = \delta(\cos\pi t)$

(5) $f(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau$　　(6) $f(t) = \dfrac{|t|}{2}[u(t+2)-u(t-2)]$

思路和技巧　对于两个奇异函数相乘或者复合奇异函数，通常需要化简并特别注意取值区间并分段考虑。

解　(1) $f(t) = 2tu(2t)u(2-t) = 2t[u(t)-u(t-2)]$，见图 1-13。

(2) $f(t) = (2-t)[u(t)-u(t-2)]$，见图 1-14。

(3) $f(t) = \text{sgn}(t^2-4) = \begin{cases} 1, & |t|>2 \\ -1, & |t|<2 \end{cases}$，见图 1-15。

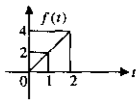

图 1-13

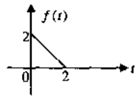

图 1-14

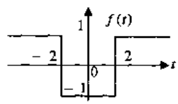

图 1-15

$$(4)\ f(t) = \frac{1}{\left|[\cos\pi t]'\right|_{t=k+\frac{1}{2}}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t-k-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-k-\frac{1}{2}\right),$$

如图 1-16 所示。

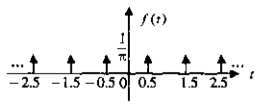

图 1-16

$$(5)\ f(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\mathrm{d}\delta(\tau) = e^{-\tau}\delta(\tau)\Big|_{\infty}^{t} + \int_{-\infty}^{t} e^{-\tau}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{-t}\delta(t) + \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau = \delta(t) + u(t)$$

见图 1-17。

(6) 如图 1-18 所示。

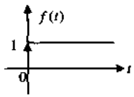

图 1-17

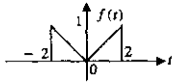

图 1-18

8. 对图 1-19 所示信号 $h(t)$，画出下列信号的波形图：

(1) $h(t+3)$ (2) $2h\left(\frac{t}{2}\right)$ (3) $h\left(\frac{t}{2}-2\right)u(-t+2)$

思路和技巧 利用横轴上的移位、尺度和反褶运算以及纵轴上的倍乘运算，注意幅度、位置以及取值区间的变化。尤其注意乘上奇异函数对波形取值范围的影响。

解 (1) 将信号向左移动 3 即可，如图 1-20 所示。

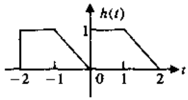

图 1-19

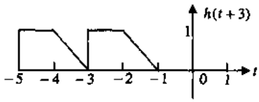

图 1-20

(2) 将信号在横轴上拉长为 2 倍，在纵轴上幅度增加为 2 倍即可，如图 1-21 所示。

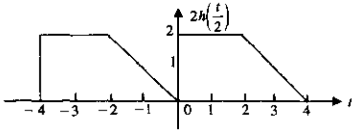

图 1-21

(3) 先画出 $h\left(\frac{t}{2}-2\right)$ 波形：将 $h(t)$ 沿横轴拉长 2 倍变成 $h\left(\frac{t}{2}\right)$，然后向右移动 4 个单位变成 $h\left(\frac{t-4}{2}\right)=h\left(\frac{t}{2}-2\right)$。乘上 $u(-t+2)$ 相当于取 $t<2$ 部分。波形分别如图 1-22(a)(b)(c) 所示。

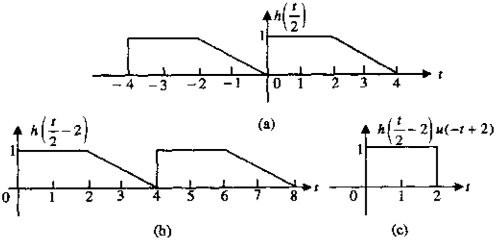

图 1-22

9. 概略画出图 1-23 所示各信号的偶分量和奇分量。

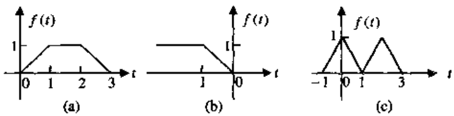

图 1-23

思路和技巧　对于单边信号（$t>0$或$t\leqslant 0$有值的函数），偶分量就是幅度降至一半，两边关于纵轴对称；奇分量就是两边关于原点对称。对于双边信号，原来对称部分保留给偶分量（奇分量为 0），剩余的单边信号按照上述处理方法。

解　(a) 原信号为右边信号，奇偶分量分别如图 1-24(a)(b) 所示。

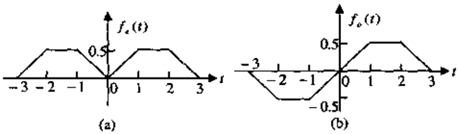

图 1-24

(b) 原信号为左边信号，奇偶分量分别如图 1-25(a)(b) 所示。

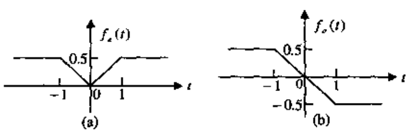

图 1-25

(c) 原信号为双边信号，奇偶分量分别如下图 1-26(a)(b) 所示。

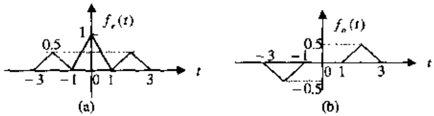

图 1-26

10. 化简下列各题：

(1) $\int_{\infty}^{+\infty}(t^2+\cos\pi t)\delta(t-1)\mathrm{d}t$ (2) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\delta'(t)\mathrm{d}t$ (3) $t\delta(t)$

(4) $\int_{-\infty}^{t}\cos\tau\delta(\tau)\mathrm{d}\tau$ (5) $\int_{\infty}^{+\infty}e^{-t}\delta(2t-2)\mathrm{d}t$ (6) $\int_{-\infty}^{t}\cos\tau u(\tau)\mathrm{d}\tau$

(7) $\cos t\delta(t-\pi)$ (8) $\int_{0}^{2\pi}t\sin\frac{t}{2}\delta(\pi-t)\mathrm{d}t$

思路和技巧 充分利用奇异函数的相乘、移位、积分、求导等性质。

解 (1) $\int_{-\infty}^{+\infty}(t^2+\cos\pi t)\delta(t-1)\mathrm{d}t=(t^2+\cos\pi t)|_{t=1}=1-1=0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\delta'(t)\mathrm{d}t= (e^{-t})'|_{t=0}=1$

(3) $t\delta(t)=0\delta(t)=0$

(4) $\int_{-\infty}^{t}\cos\tau\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\cos0\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau=u(t)$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t}\delta(2t-2)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}e^{-t}\delta(t-1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^{-1}$

(6) $\int_{-\infty}^{t}\cos\tau u(\tau)\mathrm{d}\tau=\left(\int_{0}^{t}\cos\tau\mathrm{d}\tau\right)u(t)=\sin tu(t)$

(7) $\cos t\delta(t-\pi)=\cos\pi\delta(t-\pi)=-\delta(t-\pi)$

(8) $\int_{0}^{2\pi}t\sin\frac{t}{2}\delta(\pi-t)\mathrm{d}t=t\sin\frac{t}{2}|_{t=\pi}=\pi$

11. 对于下列信号，求出它们的广义导数(解析的形式)。并画出这些广义导数的草图：

(1) $x(t)=u(t+1)-2u(t-1)+u(t-3)$

(2) $x(t)=\cos t\left[u\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-2u(t-\pi)\right]+(\cos t)u\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$

思路和技巧 利用阶跃函数的导数为冲激函数的性质，并注意冲激函数的表示方法。

解 (1) $x'(t)=\delta(t+1)-2\delta(t-1)+\delta(t-3)$，如图 1-27 所示。

(2) 求导过程如下：

$$x'(t)=\cos t\left[\delta\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-2\delta(t-\pi)\right]-\sin t\left[u\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-2u(t-\pi)\right]+$$
$$(\cos t)\delta\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)-\sin tu\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\delta\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-2\cos(\pi)\delta(t-\pi)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\delta\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)-$$
$$\sin t\left[u\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-u(t-\pi)\right]+\sin t\left[u(t-\pi)-u\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$
$$=2\delta(t-\pi)-\sin t\left[u\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-u(t-\pi)\right]+\sin t\left[u(t-\pi)-u\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

如图 1-28 所示。

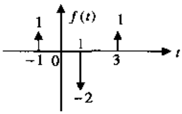

图 1-27

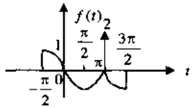

图 1-28

12. 已知信号 $f\left(2-\frac{1}{2}t\right)$ 的波形如图 1-29(a) 所示，画出信号 $f(t)$ 的波形。

思路和技巧 对于逆运算过程，需要反向利用横轴上的移位、尺度和反褶运算，注意位置以及取值区间的变化。

解 (1) 将信号 $f\left(2-\frac{1}{2}t\right)$ 波形的横坐标尺寸压缩 $\frac{1}{2}$，得信号 $f(2-t)$ 的波形，如图 1-29(b) 所示。

(2) 将信号 $f(2-t)$ 的波形向左移 2，得 $f(-t)$ 信号的波形，如图 1-29(c) 所示。

(3) 将信号 $f(-t)$ 以纵坐标为轴反转，求得信号 $f(t)$ 的波形，如图 1-29(d) 所示。

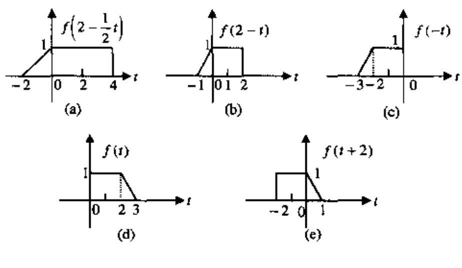

图 1-29

提示：本题还有一种解法，即在求得信号 $f(2-t)$ 的波形以后（见图 1-29(b)），将信号 $f(2-t)$ 的波形以纵坐标反褶，求得 $f(2+t)$，如图 1-29(e) 所示。最后将信号 $f(2+t)$ 的波形向右移 2，求得信号 $f(t)$，如图 1-29(d) 所示。

13. 判断下列连续时间系统是否为因果的、有记忆的、线性的、时不变的、稳定的。在下列表达式中，$e(t)$ 是输入，$r(t)$ 是输出，系统起始状态均为 0。

(1) $r(t)=e(t)+1$　　(2) $r(t)=\int_{-\infty}^{t}(t-\lambda)e(\lambda)\mathrm{d}\lambda$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=3r(t)+2e(t)$　　(4) $r(t)=\begin{cases}e(t), & |e(t)|\leqslant 10\\ 10, & |e(t)|>10\end{cases}$

(5) $r(t)=\sin e(t)$　　(6) $r(t)=e^{-t}e(t)$

(7) $r(t)=e(t+2)$

思路和技巧　因果性利用"当前输出与当前时刻以后的输入无关"准则来判断；无记忆性利用"当前输出只与当前时刻输入有关"准则来判断；线性利用"满足叠加性和均匀性"准则来判断；时不变性利用"$e(t)\to r(t)\Rightarrow e(t-t_0)\to r(t-t_0)$"准则来判断；稳定性利用"有界输入推出有界输出"准则来判定。在解题时可设系统为 $\mathrm{T}[x(t)]$，以便描述方便。有时可举特殊反例说明。

解　(1) 因果的：因为当前输出与当前时刻以后的输入无关；

无记忆的：因为当前输出只与当前时刻输入有关；

非线性的：因为 $\mathrm{T}[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]=a_1e_1(t)+a_2e_2(t)+1$，而 $a_1\mathrm{T}[e_1(t)]+a_2\mathrm{T}[e_2(t)]=a_1e_1(t)+a_1+a_2e_2(t)+a_2$；

时不变的：$\mathrm{T}[e(t-t_0)]=e(t-t_0)+1=r(t-t_0)$；

稳定的：对任意 $|e(t)|\leqslant M$ 满足 $|r(t)|=|e(t)+1|\leqslant M+1$。

(2) 因果的：因为当前输出与当前时刻以后的输入无关；

有记忆的：因为当前输出与先前时刻的输入有关；

线性的：因为 $\mathrm{T}[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]=\int_{-\infty}^{t}(t-\lambda)[a_1e_1(\lambda)+a_2e_2(\lambda)]\mathrm{d}\lambda$，

$$a_1\mathrm{T}[e_1(t)]+a_2\mathrm{T}[e_2(t)]=a_1\int_{-\infty}^{t}(t-\lambda)e_1(\lambda)\mathrm{d}\lambda+a_2\int_{-\infty}^{t}(t-\lambda)e_2(\lambda)\mathrm{d}\lambda$$

$$=\mathrm{T}[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)];$$

时变的：$\mathrm{T}[e(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{t}(t-\lambda)e(\lambda-t_0)\mathrm{d}\lambda$，而 $r(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}(t-\lambda)e(\lambda)\mathrm{d}\lambda=\int_{-\infty}^{t}(t-\lambda+t_0)e(\lambda-t_0)\mathrm{d}\lambda$；

不稳定的：可举反例如下，若 $e(t)=1$，$r(0)=\int_{-\infty}^{0}-\lambda\mathrm{d}\lambda=-\infty$。

(3) 因果的：因为当前输出与当前时刻以后的输入无关；

有记忆的：微分方程描述的系统；

线性的：线性常系数微分方程描述的系统；

时不变的：线性常系数微分方程描述的系统；

不稳定的：因为对 $e(t)=1.5$ 和 $r(0)=0$，$r(t)=e^{3t}-1$ 无界。

(4) 因果的：因为当前输出与当前时刻以后的输入无关；

无记忆的：因为当前输出只与当前时刻输入有关；

非线性：可举个特殊的反例，如当 $e_1(t)>10$，$e_2(t)>10$ 时，$T[e_1(t)+e_2(t)]=10$，而 $T[e_1(t)]+T[e_2(t)]=20$；

时不变的：容易看出 $T[e(t-t_0)]=r(t-t_0)$；

稳定的：对任意 $|e(t)|\leqslant M$ 满足 $|r(t)|\leqslant 10$。

(5) 因果的：因为当前输出与当前时刻以后的输入无关；

无记忆的：因为当前输出只与当前时刻输入有关；

非线性：可举个特殊的反例，如当 $e_1(t)>10$，$e_2(t)>10$ 时，$T[e_1(t)+e_2(t)]=10$，而 $T[e_1(t)]+T[e_2(t)]=20$；

时不变的：$T[e(t-t_0)]=\sin e(t-t_0)$，$r(t-t_0)=\sin e(t-t_0)$；

稳定的：对任意 $|e(t)|\leqslant M$ 满足 $|r(t)|=|\sin[e(t)]|\leqslant 1$。

(6) 因果的：因为当前输出与当前时刻以后的输入无关；

无记忆的：因为当前输出只与当前时刻输入有关；

线性的：　$T[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]=e^{-t}[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]$

$$a_1T[e_1(t)]+a_2T[e_2(t)]=e^{-t}a_1e_1(t)+e^{-t}a_2e_2(t);$$

时变的：$T[e(t-t_0)]=e^{-t}e(t-t_0)$，而 $r(t-t_0)=e^{-(t-t_0)}e(t-t_0)$；

不稳定的：因为对 $e(t)=1$，$e(t)=e^{-t}$ 无界。

(7) 非因果的：因为当前输出与以后的输入有关；

有记忆的：因为当前输出与以后的输入有关；

线性的：$T[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]=a_1e_1(t+2)+a_2e_2(t+2)$

$$a_1T[e_1(t)]+a_2T[e_2(t)]=a_1e_1(t+2)+a_2e_2(t+2);$$

时不变的：$T[e(t-t_0)]=e(t-t_0+2)$，$r(t-t_0)=e(t-t_0+2)$；

稳定的：对任意 $|e(t)|\leqslant M$ 满足 $|r(t)|=|e(t+2)|\leqslant M$。

14．写出图 1-30 所示系统的微分方程。

思路和技巧　对于较复杂的系统框图，需要设置中间变量，通过方程组化简消去中间变量，最终得到所求的微分方程。为了简化过程，我们还需借助 LTI 系统的微分特性和线性特性求解。

解　设图 1-30 中下面的积分器输出为 $x(t)$。相应地，上面的积分器输出和输入分别为 $x(t)$ 的一阶导数 $x'(t)$ 和二阶导数 $x''(t)$，如图 1-30 所示。

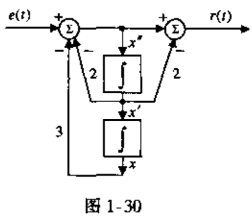

图 1-30

由图 1-30 可知，左边加法器的输出为

$$x''(t)=e(t)-2x'(t)-3x(t)$$

将上式移项，得

$$x''(t)+2x'(t)+3x(t)=e(t) \tag{1}$$

图中右边加法器的输出为

$$r(t)=x''(t)-2x'(t) \tag{2}$$

将式(1) 和式(2) 中的中间变量 $x(t)$ 及其导数消去，可求得该系统的微分方程，但其运算十分繁复。若利用 LTI 系统所具有的微分特性和线性特性，由式(1) 和式(2) 可以较快地求得该系统的微分方程。

由式(1) 和式(2) 可知，若解得式(1) 的 $x(t)$，则将 $x(t)$ 的一阶导数 $x'(t)$ 和二阶导数 $x''(t)$ 代入式(2)，可求得 $r(t)$，$x'(t)$ 和 $x''(t)$ 也可采用下面的方法求得：

若式(1) 的激励为 $e(t)$ 的一阶导数 $e'(t)$，根据 LTI 系统的微分特性，其响应为 $x'(t)$，即

$$x_1''+2x_1'+3x_1=e'(t) \tag{3}$$

式(3) 的左边与式(1) 相同，其解为

$$x_1(t)=x'(t)$$

同理，若式(1) 的激励为 $e''(t)$，其响应为 $x''(t)$，即

$$x_2''+2x_2'+3x_2=e''(t) \tag{4}$$

其解为

$$x_2(t)=x''(t)$$

根据线性性质，当激励为 $e''(t)-2e'(t)$ 时，即

$$r''(t)+2r'(t)+3r(t)=e''(t)-2e'(t) \tag{5}$$

式(5) 的左边与式(1) 相同，其解为

$$r(t)=x''(t)-2x'(t) \tag{6}$$

式(6) 与式(2) 相同，故式(5) 就是该系统的微分方程。

读者总结一下上述规律，由式(1) 和式(2) 可以很快求得式(5) 的微分方程。

15．画出下列微分方程所描述的仿真框图：

(1) $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e(t)$

(2) $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e'(t)+2e(t)$

思路和技巧　利用方程

$$c_0\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}r(t)+c_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}r(t)+\cdots+c_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)+c_nr(t)$$

$$=E_0\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}e(t)+E_1\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}t^{m-1}}e(t)+\cdots+E_{m-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)+E_me(t)$$

如下框图特点(要求 $n\geqslant m$)：(1) 包含 n 个积分单元；(2) 微分方程两边应先同除

以 c_0；(3) 最后一个积分单元输出端反馈到左边求和端的系数为 $-\frac{c_n}{c_0}$，输出到右边求和端的系数为 $\frac{E_m}{c_0}$；倒数第二个积分单元输出端反馈到左边求和端的系数为 $-\frac{c_{n-1}}{c_0}$，输出到右边求和端系数为 $\frac{E_{m-1}}{c_0}\cdots$ 第一个积分单元输出端反馈到左边求和端的系数为 $-\frac{c_1}{c_0}$，输出到右边求和端的系数为 $\frac{E_{m-n+1}}{c_0}$；第一个积分单元输入端输出到右边求和端的系数为 $\frac{E_{m-n}}{c_0}$；(4) 若方程左边缺项，则相应反馈系数为 0，从而相应的反馈线也不存在。若方程右边缺项，则相应的输出系数也为 0，从而相应的输出线也不存在。

解 (1) 直接按照上述规律画出框图，如图 1-31(a) 所示。

(2) 直接按照上述规律画出框图，如图 1-31(b) 所示。

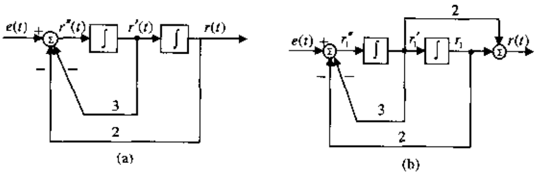

图 1-31

提示：本题还有一种解法，如下：

(1) 二阶微分方程所对应的二阶系统需要两个积分器。将原方程改为 $r''(t)=e(t)-3r'(t)-2r(t)$，把 $r''(t)$ 作为加法器的输出。

(2) 该微分方程的右端有两项：$e'(t)$ 和 $2e(t)$。它们可以被理解为是该系统的两个激励。令在 $e(t)$ 激励下，该系统的响应为 $r_1(t)$，它满足 $r''(t)+3r'(t)+2r(t)=e(t)$。请注意：上式左端与原方程相同。同时，上式与上个例题相同，故其仿真框图与图 1-30 相同，如图 1-31(b) 中所标明的 $r_1(t)$ 部分。根据 LTI 系统的线性和微分特性，可得：若 $e(t)\to r_1(t)$，则 $e'(t)+2e(t)\to r'_1(t)+2r_1(t)=r(t)$，即 $r(t)=r'_1(t)+2r_1(t)$，由此可知，将 $r'_1(t)$ 和 $2r_1(t)$ 送入加法器，就可求得 $r(t)$。

16. 某一线性时不变系统，当输入为单位阶跃信号 $u(t)$ 时，输出 $r(t)=e^{-t}u(t)+u(-1-t)$，试求该系统对图 1-32 所示输入 $e(t)$ 的响应。

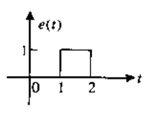

图 1-32

思路和技巧 本题需要充分利用线性时不变系统的线性

特性和时不变特性，同时需要将激励 $e(t)$ 用已知激励 $u(t)$ 的线性组合来描述。

解 容易看出：$e(t)=u(t-1)-u(t-2)$。由于系统对 $u(t)$ 的响应为 $r(t)$，根据线性时不变系统的线性特性和时不变特性可知，系统对 $e(t)$ 的响应为 $r_1(t)=r(t-1)-r(t-2)$，即

$$r_1(t)=e^{1-t}u(t-1)-e^{2-t}u(t-2)+u(-t)-u(-t+1)$$

17. 一线性时不变因果系统的输入 $e(t)$ 和输出 $r(t)$ 如图 1-33(a) 和(b) 所示，试求该系统对阶跃信号 $u(t)$ 的响应。

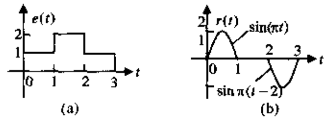

图 1-33

思路和技巧 本题与上题不同，本题在已知复杂输入的响应情况下求对单位阶跃激励的响应。通过分区间讨论，并充分利用线性时不变系统的线性特性和时不变特性，可以求解本题。

解 容易证明：$e(t)=u(t)+u(t-1)-u(t-2)-u(t-3)$。

若设系统对 $u(t)$ 的响应为 $g(t)$，则系统对 $e(t)$ 的响应 $r(t)$ 可表示为 $r(t)=g(t)+g(t-1)-g(t-2)-g(t-3)$。下面按时间区间分别求对阶跃信号 $u(t)$ 的响应 $g(t)$：

(1) $0<t<1$

激励只有 $u(t)$，而响应为 $r(t)=\sin\pi t(0<t<1)$，即 $g(t)=r(t)=\sin\pi t(0<t<1)$，按照时不变特性，可得

$$g(t-1)=\sin\pi(t-1),\quad (1<t<2)$$
$$-g(t-2)=-\sin\pi(t-2),\quad (2<t<3)$$
$$-g(t-3)=-\sin\pi(t-3),\quad (3<t<4)$$

(2) $1<t<2$

激励为 $u(t)+u(t-1)$，而响应为 $r(t)=0(1<t<2)$，即 $g(t)+g(t-1)=0$，故 $g(t)=-g(t-1)=-\sin\pi(t-1)(1<t<2)$，按照时不变特性，可得

$$g(t-1)=-\sin\pi(t-2),\quad (2<t<3)$$
$$-g(t-2)=\sin\pi(t-3),\quad (3<t<4)$$
$$-g(t-3)=\sin\pi(t-4),\quad (4<t<5)$$

(3) $2<t<3$

激励为 $u(t)+u(t-1)-u(t-2)$，而响应为 $r(t)=-\sin\pi(t-2)(2<t<$

3)，即 $g(t)+g(t-1)-g(t-2)=-\sin\pi(t-2)$，而 $2<t<3$ 时，由(1)和(2)部分的结果可知

$$g(t-1)=-\sin\pi(t-2),$$
$$-g(t-2)=-\sin\pi(t-2),$$

故

$$g(t)=-g(t-1)+g(t-2)-\sin\pi(t-2)=\sin\pi(t-2)(2<t<3)$$

按照时不变特性，可得

$$g(t-1)=\sin\pi(t-3),\quad (3<t<4)$$
$$-g(t-2)=-\sin\pi(t-4),\quad (4<t<5)$$
$$-g(t-3)=-\sin\pi(t-5),\quad (5<t<6)$$

(4) $3<t<4$

激励为 $u(t)+u(t-1)-u(t-2)-u(t-3)$，而响应为 $r(t)=0(3<t<4)$，即 $g(t)+g(t-1)-g(t-2)-g(t-3)=0$，而 $3<t<4$ 时，由(1)、(2)、(3)部分的结果可知

$$g(t-1)=\sin\pi(t-3)$$
$$-g(t-2)=\sin\pi(t-3)$$
$$-g(t-3)=-\sin\pi(t-3)$$

故

$$g(t)=-g(t-1)+g(t-2)+g(t-3)=-\sin\pi(t-3)\quad(3<t<4)$$

按照时不变特性，可得

$$g(t-1)=-\sin\pi(t-4),\quad (4<t<5)$$
$$-g(t-2)=\sin\pi(t-5),\quad (5<t<6)$$
$$-g(t-3)=\sin\pi(t-6),\quad (6<t<7)$$

(5) $4<t<5$

激励为 $u(t)+u(t-1)-u(t-2)-u(t-3)$，而响应为 $r(t)=0(4<t<5)$，即 $g(t)+g(t-1)-g(t-2)-g(t-3)=0$，而当 $4<t<5$ 时，由(2)、(3)、(4)部分的结果可知

$$g(t-1)=-\sin\pi(t-4)$$
$$-g(t-2)=-\sin\pi(t-4)$$
$$-g(t-3)=\sin\pi(t-4)$$

故

$$g(t)=-g(t-1)+g(t-2)+g(t-3)=\sin\pi(t-4)(4<t<5)$$

按照时不变特性，可得

$$g(t-1)=\sin\pi(t-5),\quad (5<t<6)$$
$$-g(t-2)=-\sin\pi(t-6),\quad (6<t<7)$$
$$-g(t-3)=-\sin\pi(t-7),\quad (7<t<8)$$

依次类推，可以得出

$$5 < t < 6,\quad g(t) = -\sin\pi(t-5)$$
$$6 < t < 7,\quad g(t) = \sin\pi(t-6)$$
……

最终可得结论 $\qquad g(t) = (\sin\pi t)u(t)$

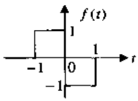

图 1-34

18. 一矩形波如图 1-34 所示，将此函数用勒让德傅里叶级数表示为

$$f(t) = c_0p_0(t) + c_1p_1(t) + \cdots + c_np_n(t)$$

试求系数 c_0, c_1, c_2, c_3。

思路和技巧 利用勒让德多项式的正交特性和奇偶函数在对称区间内的积分特性，求解勒让德-傅里叶级数系数。

解 $p_0(t) = 1, p_1(t) = t, p_2(t) = \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{1}{2}, p_3(t) = \dfrac{5}{2}t^3 - \dfrac{3}{2}t$

因为 $f(t)p_0(t), f(t)p_2(t), f(t)p_4(t)$ 为奇函数，故

$$c_0 = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)p_0(t)\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1} p_0^2(t)\mathrm{d}t} = 0,\quad c_2 = \frac{\int_{1}^{1} f(t)p_2(t)\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1} p_2^2(t)\mathrm{d}t} = 0,\quad c_4 = 0$$

因为 $f(t)p_1(t), f(t)p_3(t)$ 为偶函数，故

$$c_1 = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)p_1(t)\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1} p_1^2(t)\mathrm{d}t} = \frac{-2\int_0^1 p_1(t)\mathrm{d}t}{\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{1}} = \frac{-t^2\Big|_0^1}{\frac{1}{3}t^3\Big|_1^1} = -\frac{3}{2}$$

$$c_3 = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)p_3(t)\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1} p_3^2(t)\mathrm{d}t} = \frac{-2\int_0^1 p_3(t)\mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1}\left(\frac{25}{4}t^6 - \frac{15}{2}t^4 + \frac{9}{4}t^2\right)\mathrm{d}t}$$

$$= -\frac{\left(\frac{5}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2\right)\Big|_0^1}{\left(\frac{25}{28}t^7 - \frac{3}{2}t^5 + \frac{3}{4}t^3\right)\Big|_{-1}^{1}} = -\frac{\frac{5}{4} - \frac{3}{2}}{\frac{25}{14} - 3 + \frac{3}{2}} = \frac{7}{8}$$

第二节　本 章 小 结

1. 本章主要讲述信号与系统的基本概念。重点在于信号概念及信号分类、典型连续时间信号和奇异信号、信号运算、信号分解、系统概念及其分类、线性时不变系统概念和性质。

2. 在信号图形描述中，主要需掌握四种类型：调制型(低频信号与高频信号相乘，指数信号与周期信号相乘等)、奇异型(奇异信号与其他信号相乘)、超越函数型

(需要求出三点一限）和复合函数型(主要指复合奇异函数，需要先化简)。应掌握所有典型连续时间信号和奇异信号的图形特征。

3. 在信号分类中，主要掌握三种分类：周期与非周期；能量与功率；奇与偶。同时要会求周期(尤其是由两个周期信号叠加而成的信号)、能量、功率、奇分量、偶分量、直流分量。

4. 在信号运算中，重点掌握横轴上的尺度、移位和反褶运算，不管是正向 $(f(t)\to f(at+b))$ 还是逆向 $(f(at+b)\to f(t))$。

5. 在信号分解中，掌握奇偶分量分解(注意单边函数和双边函数奇偶分解的诀窍)、阶跃分量描述法和正交分解及系数求法。

6. 与奇异信号有关的运算，主要有四类：积分类、求导类、相乘类、极限类。务必掌握所有相关性质并借助广义函数的概念。

7. 在系统分类中，重点考虑如下性质的判定准则：因果性、无记忆性、线性、时不变性、稳定性。尺度、反褶和移位运算对时不变性和因果性有很大影响，但对线性无影响；激励的自乘影响线性；激励与其他函数相乘不影响线性。需要特别注意在时不变性判断中应从系统角度替换 t 为 $t-t_0$；在系统框图描述中，掌握线性常系数微分方程的框图特点。对于复杂框图求微分方程时，需要设中间变量联立方程组求解。

8. 线性时不变系统概念和性质非常重要，它将渗透到信号系统各章各节中，务必掌握并灵活应用所有 LTI 系统性质。

第三节　习题精选

1. 判断下述信号是否是周期的。如果是周期信号，试求出它的基本周期：

(1) $x(t)=e^{j(\pi t-1)}$　(2) $x(t)=\varepsilon v\{(\cos 2\pi t)u(t)\}$，$\varepsilon v\{\cdot\}$ 表示偶部

(3) $x(t)=\varepsilon v\left\{\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{4}\right)u(t)\right\}$

2. 绘制下列信号波形：

(1) $(3e^{-t}+6e^{-2t})u(t)$　(2) $\left(1-\frac{|t|}{2}\right)\sin 2\pi t[u(t)-u(t-2)]$

(3) $e^{-t}\cos(10\pi t)[u(t-1)-u(t-2)]$

(4) $\sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)[u(t)-u(t-1)]$

(5) $(t+1)u(t-1)-tu(t)-u(t-2)$

(6) $e^{-(t-1)}[u(t-1)-u(t-2)]$

(7) $\cos t\left[u\left(t+\frac{\pi}{2}\right)-2u(t-\pi)\right]+(\cos t)u\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)$　(8) $te^{-t}u(t)$

3. 绘制下述信号波形：

(1) $(2-3e^{-t})\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\delta(t-n)$ (2) $e^{-|t|}\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\delta(t-n)$ (3) $u(t^2-4)$

(4) $(2e^{-t}-3e^{-3t})\cdot\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\delta(t-n)$ (5) $t\cdot u(t)-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u(t-2n)$

(6) $\cos[\pi t\,\mathrm{sgn}(t)]$ (7) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-t}\delta(t)]$ (8) $\mathrm{sgn}(\cos\pi t)$

4. 画出图 1-35 所示各信号波形的偶分量和奇分量。

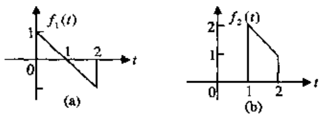

图 1-35

5. 对图 1-36 所示的 $f(t)$ 及图 1-37 所示的 $h(t)$，概略画出下列每个信号的波形图：

(1) $f(t)h(-t)$ (2) $f(t-1)h(1-t)$

(3) $f\left(2-\dfrac{t}{2}\right)h(t+4)$ (4) $f(1-t)f(t-1)$

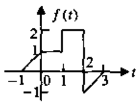

图 1-36

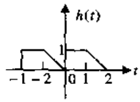

图 1-37

6. 一连续时间信号 $f(t)$ 的波形如图 1-38 所示，试画出下述信号的波形图：

(1) $f(t+4)$ (2) $2f\left(\dfrac{t}{2}-2\right)$ (3) $2f(1-2t)$ (4) $2f(t-2)$

7. $f\left(2-\dfrac{t}{3}\right)$的波形如图 1-39 所示，概略画出 $f(t)$ 波形图。

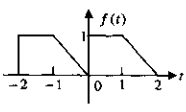

图 1-38

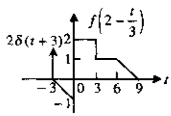

图 1-39

8. 分别指出下列各波形的直流分量和奇分量等于多少？

(1) 全波整流 $f(t) = |\sin(\omega t)|$　　(2) $f(t) = \sin^2(\omega t)$

(3) $f(t) = \cos(\omega t) + \sin(\omega t)$　　(4) 升余弦 $f(t) = K[1 + \cos(\omega t)]$

9. 求下列积分表示式的函数值：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0)\delta(t)\mathrm{d}t$　　(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\left[2t + 2\cos\frac{\pi}{3}(t-1)\right]\delta(t-2)\mathrm{d}t$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0 - t)\delta(t)\mathrm{d}t$　　(4) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t - t_0)u\left(t - \frac{t_0}{2}\right)\mathrm{d}t$

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{-t} + t)\delta(t+2)\mathrm{d}t$　　(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}[\delta(t) - \delta(t - t_0)]\mathrm{d}t$

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty}[2t + \sin 2t]\delta'(t)\mathrm{d}t$　　(8) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \cos t)\delta\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}t$

10. 试求下列函数值：

(1) $\int_{-1}^{1}\delta(t^2 - 9)\mathrm{d}t$　　(2) $\int_{-2}^{2}\delta(t^2 - 4t + 3)\mathrm{d}t$

(3) $\int_{-2}^{+\infty}[(e^{-t} + t)\delta(t-1) + t\delta(t+3)]\mathrm{d}t$　　(4) $\int_{+1}^{+\infty} te^{-2t}\cdot\delta'(t-2)\mathrm{d}t$

(5) $\int_{-2}^{+\infty} e^{-t}[\delta(t-1) + \delta'(t-1)]\mathrm{d}t$　　(6) $\int_{-\infty}^{t}[2 + \cos 3\tau]\delta\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathrm{d}\tau$

11. 试求下列函数值(设 $u(0) = 0.5$)：

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-2t}u(t)]$　　(2) $e^{-t+2}\delta(t)$　　(3) $\delta(t^2 - 4)$

(4) $\delta(\sin t)$　　(5) $4u(t-1)\delta(t-1)$　　(6) $t^2\delta''(t)$

12. 对于图 1-40 所示信号 $f(t)$，求出 $f(-3t-2)$，并画草图。

13. 已知 $f(t)$ 的波形如图 1-41 所示，画出 $y(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$ 波形。

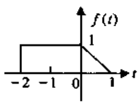

图 1-40

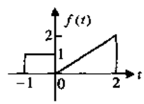

图 1-41

14. 已知 $f(t)$ 的波形如图 1-42 所示，画出下列各信号波形：

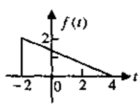

图 1-42

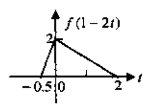

图 1-43

(1) $f(2t+1)$　　(2) $f\left(1-\frac{1}{2}t\right)$

(3) $f(2-t)u(t+1)$　　(4) $f(t+1)u(-t+1)$

15. 已知 $f(1-2t)$ 的波形如图 1-43 所示，试画出 $f(t)$ 的波形。

16. 对于下列信号，求出它们的广义导数(解析形式)。并画出这些广义导数的草图：

(1) $x(t)=(t+1)u(t-1)-tu(t)-u(t-2)$

(2) $x(t)=e^{-t}u(t)+e^{-t}[e^{(2t-4)}-1]u(t-2)-e^{t-4}u(t-4)$

17. 判断下列系统是否为线性的、时不变的、因果的？

(1) $r(t)=\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$　　(2) $r(t)=e(t)u(t)$

(3) $r(t)=\sin[e(t)]u(t)$　　(4) $r(t)=e(1-t)$

(5) $r(t)=e(2t)$　　(6) $r(t)=e^2(t)$

(7) $r(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)\mathrm{d}\tau$　　(8) $r(t)=\int_{-\infty}^{5t}e(\tau)\mathrm{d}\tau$

18. 判断下列系统是否是可逆的。若可逆，给出它的逆系统；若不可逆，指出使该系统产生相同输出的两个输入信号。

(1) $r(t)=e(t-5)$　　(2) $r(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e(t)$

(3) $r(t)=\int_{-\infty}^{t}e(\tau)\mathrm{d}\tau$　　(4) $r(t)=e(2t)$

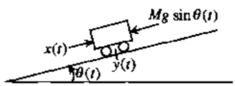

图 1-44

19. 如图 1-44 所示，小车速度模型表示为如下微分方程

$$M\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+k_fv(t)=x(t)-Mg\sin\theta(t)$$

其中，$x(t)$ 是驱动力或者是制动力，$Mg\sin\theta(t)$ 是由于重力所产生的力，g 是重力常数，$\theta(t)$ 是斜面与水平面的夹角，$v(t)=\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}$ 是小车的速度。在下面各小题中，系统的输出是小车的速度 $v(t)$：

(1) 如果对所有的 t，$\theta(t)=0$，系统的输入为 $x(t)$，判断此系统是否为线性的、时不变的。

(2) 假设 $\theta(t)\neq0$，$x(t)$ 是系统的输入，判断此系统是否为线性的、时不变的。

(3) 如果 $x(t)$ 为第一输入，$\sin\theta(t)$ 为第二输入，那么此系统为两输入系统，判断这个两输入系统是否为线性的、时不变的。

20. 对于下述每一个连续时间系统，$e(t)$ 为其输入，$r(t)$ 为其输出，$\mathrm{T}[e(t)]$ 表示系统对 $e(t)$ 的响应，试问该系统是否为

(a) 线性系统；(b) 时不变系统；(c) 因果系统；(d) 稳定系统。

(1) $r(t) = \mathrm{T}[e(t)] = e(t) \cdot e(t-1)$

(2) $r(t) = \mathrm{T}[e(t)] = te(t)$

(3) $r(t) = \mathrm{T}[e(t)] = e(t-2) - 2e(t-17)$

(4) $r(t) = \mathrm{T}[e(t)] = e(3t)$

(5) $r(t) = \mathrm{T}[e(t)] = \begin{cases} e(t), & t \geqslant 1 \\ 0, & t = 0 \\ e(t+1), & t \leqslant -1 \end{cases}$

(6) $r(t) = \mathrm{T}[e(t)] = \begin{cases} e(t), & t \geqslant 1 \\ 0, & t = 0 \\ e(t), & t \leqslant -1 \end{cases}$

(7) $r(t) = \mathrm{T}[e(t)] = e\left(\dfrac{t}{3}\right)$

(8) $r(t) = \mathrm{T}[e(t)] = \varepsilon v\{e(t)\}$

21. 写出下列各图所示系统的微分方程：

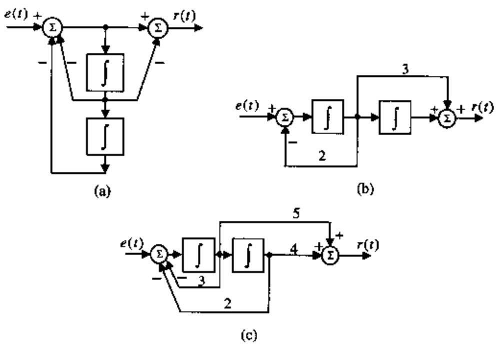

图 1-45

22. 画出下列微分方程的系统框图：

(1) $r''(t) + 4r'(t) + 2r(t) = e''(t) - 2e(t)$

(2) $\dfrac{d^3}{dt^3}r(t) + 3\dfrac{d^2}{dt^2}r(t) + 3\dfrac{d}{dt}r(t) + r(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}e(t) + 2\dfrac{d}{dt}e(t)$

(3) $\dfrac{d^2}{dt^2}r(t) + 2\dfrac{d}{dt}r(t) + 3r(t) = \dfrac{d}{dt}e(t) + 2e(t)$

23. 某一线性时不变系统有下面的输入-输出关系：如果 $e(t) = u(t)$，那么 $r(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$；如果 $e(t) = \cos(2t)$，那么 $r(t) = 0.707\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right)$。对下列输入，求出 $r(t)$：

(1) $e(t)=2u(t)-2u(t-1)$　(2) $e(t)=4\cos(2(t-2))$

(3) $e(t)=5u(t)+10\cos(2t)$　(4) $e(t)=\delta(t)$　(5) $e(t)=tu(t)$

24. 若一线性非时变系统对图 1-46(a) 所示信号 $e_1(t)$ 的响应是图 1-46(b) 所示的信号 $r_1(t)$。

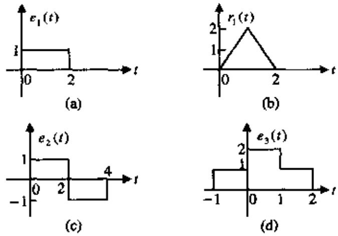

图 1-46

(1) 试求对图 1-46(c) 所示输入 $e_2(t)$ 的响应，并概略画出其波形。

(2) 试求对图 1-46(d) 所示输入 $e_3(t)$ 的响应，并概略画出其波形。

25. 考虑图 1-47 中所示的连续信号。说明这些信号可由矩形脉冲 $G_\tau(t)$ 和（或）三角脉冲 $\left(1-2\frac{|t|}{\tau}\right)G_\tau(t)$ 的叠加得到。

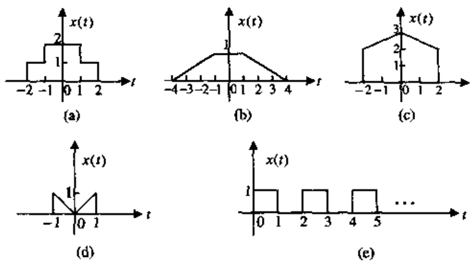

图 1-47

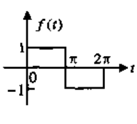

图 1-48

26. 将图 1-48 的矩形波用正弦函数的有限项级数来近似

$$f(t)\approx c_1\sin t+c_2\sin(2t)+\cdots+c_n\sin(nt)$$

分别求 $n=1,2,3,4$ 四种情况下的方均误差 $\bar{\varepsilon}^2$。

考　研　篇

第一节　考研试题精解

1.(北京航空航天大学 2001 年考研题) 判断下列叙述的正误,正确的打“√”,错误的打“×”。

(1) 两个周期信号之和一定是周期信号。 (　)

(2) 所有非周期信号都是能量信号。 (　)

(3) 两个线性时不变系统级联构成的系统是线性时不变的。 (　)

(4) 两个非线性系统的级联构成的系统也是非线性的。 (　)

思路和技巧　周期信号的和的周期性,在前面习题精解中已经给出具体结论。非周期信号与能量信号无任何必然联系。两个相同特性的系统级联未必构成同性质的系统,要视具体情况而定。

解　(1) 错。例如:$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \sin t + \sin\pi t$。

(2) 错。例如:$f(t) = tu(t)$。

(3) 对。设两个 LTI 系统分别为 T_1 和 T_2,则级联后的输入 $e(t)$ 和输出 $r(t)$ 满足 $r(t) = T_2[T_1[e(t)]] = T[e(t)]$。

先看线性。设整个系统对激励 $e_1(t)$ 的响应为 $r_1(t)$,对激励 $e_2(t)$ 的响应为 $r_2(t)$,则对线性组合激励 $a_1e_1(t) + a_2e_2(t)$ 的响应为

$$\begin{aligned} r(t) &= T_2[T_1[a_1e_1(t) + a_2e_2(t)]] = T_2[a_1T_1[e_1(t)] + a_2T_1[e_2(t)]] \\ &= a_1T_2[T_1[e_1(t)]] + a_2T_2[T_1[e_2(t)]] = a_1r_1(t) + a_2r_2(t) \end{aligned}$$

故级联后的系统满足线性。

再看时不变性。设整个系统对激励 $e(t)$ 的响应为 $r(t)$,对激励 $e(t-t_0)$ 的响应为 $r_s(t)$;设系统 T_1 对激励 $e(t)$ 的响应为 $r_1(t)$,它满足 $T_1[e(t-t_0)] = r_1(t-t_0)$。而系统 T_2 对输入 $r_1(t-t_0)$ 的响应就是整个系统 T 对激励 $e(t-t_0)$ 的响应,系统 T_2 对输入 $r_1(t)$ 的响应就是系统 T 对激励 $e(t)$ 的响应 $r(t)$,根据系统 T_2 的时不变性可知

$$T_2[T_1[e(t-t_0)]] = r_s(t) = T_2[r_1(t-t_0)] = r(t-t_0)$$

故级联后的系统满足时不变特性。

(4) 错。例如系统 1 为 $r(t) = e^3(t)$;系统 2 为 $r(t) = \sqrt[3]{e(t)}$;而级联后的系统为 $r(t) = e(t)$。

2.(北京航空航天大学 2000 年考研题) 选择题。设 $x(t) = 0, t < 3$,试确定下列信号为零的 t 值:

(1) $x(1-t) + x(2-t)$ (　)

(A) $t>-2$ 或 $t>-1$ (B) $t=1$ 和 $t=2$ (C) $t>-1$ (D) $t>-2$

(2) $x(1-t)\cdot x(2-t)$ ( )

(A) $t>-2$ 或 $t>-1$ (B) $t=1$ 和 $t=2$ (C) $t>-1$ (D) $t>-2$

(3) $x\left(\frac{t}{3}\right)$ ( )

(A) $t>3$ (B) $t=0$ (C) $t<9$ (D) $t=3$

思路和技巧 本题实质上是考察移位和尺度变换对阶跃函数定义域的影响。可用图解法验证结果。

解 (1) 只有两式均为0，才能保证和一定为0，则根据 $1-t<3$ 且 $2-t<3$，可得 $t>-1$。选(C)。

(2) 只要一项为0，就能保证乘积为0，则根据 $1-t<3$ 或 $2-t<3$，可得 $t>\ \ 2$。选(D)。

(3) 根据 $\frac{t}{3}<3$ 得 $t<9$。选(C)。

3.(北京航空航天大学2000年考研题) 选择题。试确定下列信号周期：

(1) $x(t)=3\cos\left(4t+\frac{\pi}{3}\right)$ ( )

(A) 2π (B) π (C) $\pi/2$ (D) $2/\pi$

(2) $x(n)=2\cos(n\pi/4)+\sin(n\pi/8)-2\cos(n\pi/2+\pi/6)$ ( )

(A) 8 (B) 16 (C) 2 (D) 4

思路和技巧 后一题利用如下离散周期信号的和的周期性结论：设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的基本周期分别为 M_1 和 M_2，则 $x_1(n)+x_2(n)$ 是周期信号的条件是：$\frac{M_1}{M_2}=\frac{k}{m}$ 为有理数(k, m 为互素正整数)，其周期满足 $M=mM_1=kM_2$。

解 (1) $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$。选(C)。

(2) $2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$的周期为 $M_1=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$；$\sin\left(\frac{n\pi}{8}\right)$的周期为 $M_2=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$；$-2\cos\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期为 $M_3=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$，故它们和的周期为16。选(B)。

4.(北京航空航天大学2000年考研题) 选择题。已知系统

(A) $r(t)=2e(t)+3$　　(B) $r(t)=e(2t)$

(C) $r(t)=e(-t)$　　(D) $r(t)=te(t)$

试判断上述哪些系统满足下列条件：

(1) 不是线性系统的是________。(2) 不是稳定系统的是________。

(3) 不是时不变系统的是______。(4) 不是因果系统的是________。

思路和技巧　线性利用“满足叠加性和均匀性”准则来判断；稳定性利用“有界输入推出有界输出”准则来判定；时不变性利用“$e(t) \to r(t) \Rightarrow e(t-t_0) \to r(t-t_0)$”准则来判断；因果性利用“当前输出与当前时刻以后的输入无关”准则来判断；在解题时可设系统为 $\mathrm{T}[e(t)]$ 以便描述方便。有时可举特殊反例说明。

解　(1) 选(A)。因为 $r_1(t) = 2ae(t) + 3 \neq a[2e(t)+3] = ar(t)$ 不满足均匀性。

(2) 选(D)。因为 $e(t) = 1$ 时，$r(t) = t$ 无界。

(3) 选(B)(C)(D)。

对于(B) 来说，

$$
\begin{aligned}
r_1(t) &= \mathrm{T}[e(t-t_0)] = \mathrm{T}[e_1(t)] = e_1(2t) \\
&= e(2t-t_0) \neq e(2t-2t_0) = r(t-t_0)
\end{aligned}
$$

对于(C) 来说，

$$
\begin{aligned}
r_1(t) &= \mathrm{T}[e(t-t_0)] = \mathrm{T}[e_1(t)] = e_1(-t) \\
&= e(-t-t_0) \neq e(-t+t_0) = r(t-t_0)
\end{aligned}
$$

对于(D) 来说，

$$
\begin{aligned}
r_1(t) &= \mathrm{T}[e(t-t_0)] = \mathrm{T}[e_1(t)] = te_1(t) \\
&= te(t-t_0) \neq (t-t_0)e(t-t_0) = r(t-t_0)
\end{aligned}
$$

(4) 选(B)(C)；

对于(B) 来说，$t = 2$ 时刻的输出取决于 $t = 4$ 的输入。

对于(C) 来说，$t = -1$ 时刻的输出取决于 $t = 1$ 的输入。

5.(哈尔滨工程大学 2002 年考研题) 计算下列信号值：

(1) $f_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2(t^2-2)\delta(t-2)\mathrm{d}t$

(2) $f_2(t) = \int_{0}^{+\infty} [\delta(t^2-1)]e^{-t}\mathrm{d}t$

思路和技巧　利用冲激函数的积分特性和复合函数特性，注意冲激点是否在积分区间内。

解　(1) $f_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2(t^2-2)\delta(t-2)\mathrm{d}t = 2(t^2-2)|_{t=2} = 0$

(2) 根据复合函数性质可得

$$
\begin{aligned}
\delta(t^2-1) &= \left|\frac{1}{2t|_{t=-1}}\right|\delta(t+1) + \left|\frac{1}{2t|_{t=1}}\right|\delta(t-1) \\
&= \frac{1}{2}[\delta(t-1)+\delta(t+1)]
\end{aligned}
$$

则 $f_2(t) = \int_0^{+\infty}[\delta(t^2-1)]e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2}[\delta(t-1)]e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}e^{-1}$。(注意：这里积分限不包含 $t = -1$)

6.（北京理工大学 2000 年考研题）已知 $x_1(t)$，如图 1-49 所示。画出 $\frac{1}{2}[x_1(t)+x_1(-t)]$ 和 $\frac{1}{2}[x_1(t)-x_1(-t)]$ 的波形。

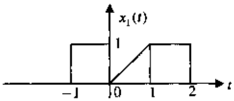

图 1-49

思路和技巧　该信号是双边函数，且无对称部分。此时需按图解法求奇分量和偶分量。

解　$\frac{1}{2}x_1(t)$ 和 $\frac{1}{2}x_1(-t)$ 分别如图 1-50(a) 和(b) 所示，它们相加和相减的波形分别如图 1-50(c) 和(d) 所示。

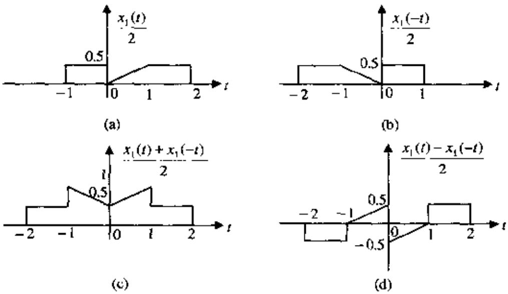

图 1-50

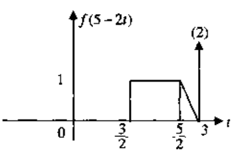

图 1-51

7.（北京理工大学 2001 年考研题）已知信号 $f(5-2t)$ 的图形如图 1-51 所示，要求画出 $f(t)$ 的图形。

思路和技巧　逆向进行移位、反褶和尺度变换。注意冲激函数的冲激强度的变化。

解　按 $f(5-2t)\to f(5-t)\to f(5+t)\to f(t)$ 分别进行尺度、反褶和移位运算。分别如图 1-52(a)(b)(c) 所示。

提示：本题还有一种解法，即可按 $f(5-2t)\to f(5+2t)\to f(5+t)\to f(t)$ 分别进行反褶、尺度和移位运算。

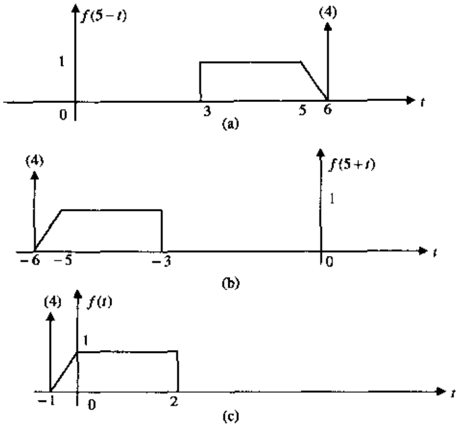

图 1-52

8.(考研模拟题) 将如图 1-53 所示的连续信号展成如下形式：

$$x(t) = f_1(t)u(t - t_1) + f_2(t)u(t - t_2) + \cdots$$

给出信号 $f_1(t), f_2(t), \cdots$ 最简单的解析表达形式。

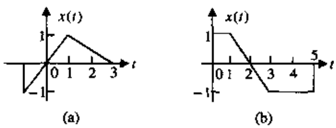

图 1-53

思路和技巧　先将信号分段表示，然后转化为所需的分解形式，最终得到相应分量的解析表达式。

解　(a) 该信号可分为两段：$t(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ 和 $\dfrac{-t+3}{2}(1 \leqslant t \leqslant 3)$，即

$$x(t) = t[u(t+1) - u(t-1)] + \frac{3-t}{2}[u(t-1) - u(t-3)]$$

可化简为

$$x(t) = tu(t+1) + \frac{3-2t}{2}u(t-1) + \frac{-3+t}{2}u(t-3)$$

故 $f_1(t) = t, t_1 = -1; f_2(t) = \dfrac{3-2t}{2}, t_2 = 1; f_3(t) = \dfrac{-3+t}{2}, t_3 = 3$。

(b) 该信号可分为三段：1 $(0 \leqslant t \leqslant 1)$，$-t+2(1 \leqslant t \leqslant 3)$ 和 $-1(3 \leqslant t \leqslant 5)$，即

$$x(t)=[u(t)-u(t-1)]+(2-t)[u(t-1)-u(t-3)]+(-1)[u(t-3)-u(t-5)]$$

可化简为

$$x(t)=u(t)+(1-t)u(t-1)+(t-3)u(t-3)+u(t-5)$$

故 $f_1(t)=1, t_1=0; f_2(t)=1-t, t_2=1; f_3(t)=t-3, t_3=3; f_4(t)=1, t_4=5$。

第二节　考研试题精选

1.（北京航空航天大学 2001 年考研题）已知如下四个系统，在表格中标明系统特性，符合者打"√"，不符合者打"×"。

(A) $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+10r(t)=e(t)$　　(B) $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+t^2r(t)=e(t)$

(C) $\dfrac{\mathrm{d}r(t)}{\mathrm{d}t}+r(t)=e(t+10)$　　(D) $r(t)=e(t+10)+e^2(t)$

特　性	系统			
	(A)	(B)	(C)	(D)
线　性				
时不变				
因　果				
有记忆				

2.（哈尔滨工程大学 2002 年考研题）绘出信号 $f(t)=\int_0^t[\delta(\tau^2-\tau)-2\delta(\tau-2)]d\tau$ 的波形。

3.（哈尔滨工程大学 2002 年考研题）试判别连续时间系统 $r(t)=\mathrm{T}[e(t)]=e(t)\cos(t)$（$e(t)$ 为激励，$r(t)$ 为响应）是否为(A) 线性系统；(B) 时不变系统；(C) 因果系统；(D) 稳定系统。（注：要求写明判别过程）

4.（北京理工大学 2000 年考研题）已知 $x\left(2-\dfrac{1}{2}t\right)$ 的波形如图 1-54 所示。画出 $x(t)$ 的波形。

5.（哈尔滨工业大学 2002 年考研题）选择题。某连续时间系统的输入 $e(t)$ 和

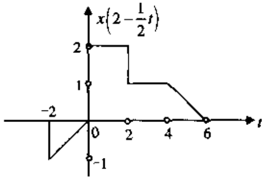

图 1-54

输出 $r(t)$ 满足 $r(t)=|e(t)-e(t-1)|$，则该系统为________系统。

(A) 因果、时变、非线性

(B) 非因果、时不变、非线性

(C) 非因果、时变、线性

(D) 因果、时不变、非线性

6.（哈尔滨工业大学 2002 年考研题）

$\int_{-\infty}^{+\infty}(t+\cos\pi t)(\delta(t)+\delta'(t))dt=$____________________。

7.（考研模拟题）求图 1-55 所示周期性三角波的沃尔什-傅里叶级数 $x(t)=c_0+\sum_{m=1}^{+\infty}[c_m\text{cal}(m,t)+s_m\text{sal}(m,t)]$ 的系数 c_0,c_1,c_2,c_3 和 s_1,s_2,s_3 各为多少？画出上述结果综合逼近此三角波的波形。

8.（考研模拟题）将如图 1-56 所示的连续信号展成如下形式

$$x(t)=f_1(t)u(t-t_1)+f_2(t)u(t-t_2)+\cdots$$

给出信号 $f_1(t),f_2(t),\cdots$ 最简单的解析表达形式。

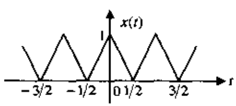

图 1-55

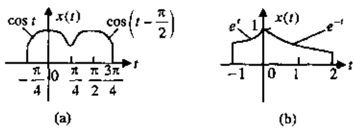

图 1-56

第二章　连续时间系统的时域分析

基　础　篇

第一节　重点、难点和考点

一、重点

1. 微分方程的建立

(1) 掌握根据电路图或系统仿真框图，列写该系统微分方程的方法。若已知电路图，掌握如下步骤：首先列写每个元件的约束特性，然后利用网络拓扑约束列写方程组，最后化简得到微分方程。若已知仿真框图，通常需要设中间变量列写多个方程，最终化简得到微分方程。这里，需要掌握各电路元件(电阻、电容、电感等)的约束特性。掌握基尔霍夫电压定律(KVL)、基尔霍夫电流定律(KCL)以及机械系统的达朗贝尔原理。

(2) 理解线性时不变系统的微分方程形式是线性常系数微分方程；反过来，线性常系数微分方程描述的系统未必就是线性的、时不变的和因果的。只有组成系统的元件线性、参数恒定且无起始储能，系统才为线性时不变系统。

2. 微分方程的经典解法

(1) 求齐次解(自由响应)$r_h(t)$。理解齐次方程的定义，即激励为 0 的微分方程。理解齐次解形式为 $Ae^{\alpha t}$ 的线性组合。了解特征方程的由来。掌握根据特征根情况设齐次解形式的方法。

(2) 求特解(强迫响应)$r_p(t)$。掌握如下求解步骤：首先将激励 $e(t)$ 代入微分方程右端，化简得自由项。然后根据自由项形式与特征根情况设特解。将特解形式代入方程，由系数平衡确定待定系数，从而求出特解。

(3) 求完全解 $r(t)=r_p(t)+r_h(t)$，其中 $r_h(t)$ 有 n 个待定系数。由 n 个初始条件 $r^{(k)}(0_+)=\{r^{(0)}(0_+),\ r^{(1)}(0_+),\cdots,\ r^{(n-1)}(0_+)\}$ 列写 n 个方程求出待定系数。注意注明求解区间为 $0_+\leqslant t\leqslant+\infty$。

3. 由起始状态确定初始条件

(1) 理解起始状态 $r^{(k)}(0_-)=\{r^{(0)}(0_-),\ r^{(1)}(0_-),\cdots,\ r^{(n-1)}(0_-)\}$ 和初始条件 $r^{(k)}(0_+)=\{r^{(0)}(0_+),\ r^{(1)}(0_+),\cdots,\ r^{(n-1)}(0_+)\}$ 的定义。

(2) 已知电路图，掌握利用电容电压和电感电流一般不跳变的原理，由 $r^{(k)}(0_-)$ 求 $r^{(k)}(0_+)$ 的方法。

(3) 已知微分方程与激励 $e(t)$，掌握用冲激函数平衡法和目测法，由 $r^{(k)}(0_-)$ 求 $r^{(k)}(0_+)$。

4. 零输入响应和零状态响应

(1) 理解响应的另一种分解法：零输入响应 + 零状态响应。

(2) 深刻理解零输入响应 $r_{zi}(t)$ 的定义，即没有外加激励信号作用，完全由起始状态所产生的响应。理解 $r_{zi}(t)$ 是一种齐次解，其初始条件就是 $r^{(k)}(0_-)$，即 $r_{zi}(t)$ 的待定系数用 $r^{(k)}(0_-)$ 确定即可。

(3) 深刻理解零状态响应 $r_{zs}(t)$ 的定义，即起始状态为 0，只由激励产生的响应。理解 $r_{zs}(t)$ 既含特解又含齐次解，其初始条件就是跳变值 $r^{(k)}(0_+) - r^{(k)}(0_-)$，即待定系数由跳变值确定。

(4) 理解 $r_{zi}(t) \neq r_h(t)$，$r_{zs}(t) \neq r_p(t)$，$r_{zi}(t)$ 包含部分 $r_h(t)$，而 $r_{zs}(t)$ 包含 $r_p(t)$ 和部分 $r_h(t)$。

(5) 理解瞬态响应和稳态响应的概念。

5. 扩展的线性时不变系统概念

(1) 首先需要理解：在第一章的 LTI 概念下，若常系数线性微分方程的起始状态 $r^{(k)}(0_-)$ 不为 0，则系统既不满足线性时不变特性，又不满足因果性。常系数线性微分方程所描述的系统只有在起始状态为 0 的条件下，才满足线性时不变特性和因果性。

(2) 深刻理解扩展后的线性时不变系统概念，其中线性包含以下三层含义：一是响应的可分解性，即 $r(t) = r_{zi}(t) + r_{zs}(t)$；二是零状态线性，即当 $r^{(k)}(0_-)$ 等于0时，$r_{zs}(t)$ 对 $e(t)$ 呈线性；三是零输入线性，即当 $e(t)$ 为0时，$r_{zi}(t)$ 对各起始状态呈线性。而时不变特性只是针对零状态响应而言。

6. 冲激响应和阶跃响应

(1) 深刻理解冲激响应 $h(t)$ 的定义。理解 $h(t)$ 是零状态响应，但形式上是齐次解，它满足线性时不变特性。熟练掌握 $h(t)$ 的两种求法：待定系数法和冲激函数平衡法。掌握用冲激响应判断系统的记忆性、因果性和稳定性的方法。

(2) 深刻理解阶跃响应 $g(t)$ 的定义。理解它是零状态响应，包含齐次解与特解。根据线性时不变特性，理解 $g(t)$ 等于 $h(t)$ 的积分。掌握 $g(t)$ 的三种求法：一是先求 $h(t)$，再通过积分求 $g(t)$；二是待定系数法；三是冲激函数平衡法。

7. 卷积、卷积性质和卷积求法

(1) 深刻理解卷积的定义和物理意义。了解两种反卷积概念：系统辨识和信号检测。

(2) 熟练掌握卷积的代数性质，即交换律、分配律和结合律。深刻理解分配律和结合律的物理含义及成立条件。熟练掌握卷积的微积分性质和时移特性。熟练掌握 $\delta(t)$ 和 $u(t)$ 的各种卷积性质。

(3) 熟练掌握卷积的三种求法：图解法、利用卷积定义法和利用卷积性质法。了解复杂卷积的数值求解方法。

(4) 掌握用激励 $e(t)$ 与系统冲激响应 $h(t)$ 的卷积求出零状态响应 $r_{zs}(t)$ 的方法。

8. 算子的定义和应用

(1) 了解算子符号的定义。理解算子的运算规则：可以进行因式分解，但公因子不能相消；算子乘除顺序不可随意颠倒。

(2) 在已知电路图或系统框图条件下，掌握用算子符号建立微分方程的方法。掌握求解用算子描述的微分方程的方法。

二、难点

1. 根据特征根情况设齐次解形式

(1) 若特征根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为互不相同实根，齐次解可设为 $r_h(t)=A_1e^{\alpha_1 t}+A_2e^{\alpha_2 t}+\cdots+A_ne^{\alpha_n t}$。其中 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 为待定系数。

(2) 若 α_1 为 k 重特征根，则与 α_1 有关的齐次解部分可设为 $(A_1t^{k-1}+A_2t^{k-2}+\cdots+A_k)e^{\alpha_n t}$。其中 A_1, A_2, $\cdots$, A_k 为待定系数。

(3) 若 α_1 与 α_2 为一重共轭复根 $p\pm qj$，则对应齐次解部分可设为 $(A_1\cos qt+A_2\sin qt)e^{pt}$。其中，$A_1$, A_2 为待定系数。

(4) 若 α_1 与 α_2 为 k 重共轭复根 $p\pm qj$，则对应齐次解部分可设为 $[(A_1t^{k-1}+\cdots+A_k)\cos qt+(B_1t^{k-1}+\cdots+B_k)\sin qt]e^{pt}$。其中，$A_1$, A_2, $\cdots$, A_k 和 B_1, B_2, $\cdots$, B_k 为待定系数。

2. 根据自由项形式与特征根情况设特解 $r_p(t)$

(1) 自由项为常数 E，0 不是特征根，特解可设为 B。

(2) 自由项为常数 E，0 是 k 重特征根，特解可设为 Bt^k。

(3) 自由项为 $P_\lambda(t)$，0 不是特征根，特解可设为 $Q_\lambda(t)$。

(4) 自由项为 $P_\lambda(t)$，0 是 k 重特征根，特解可设为 $t^kQ_\lambda(t)$。

(5) 自由项为 Ee^{at}，a 不是特征根，特解可设为 Be^{at}。

(6) 自由项为 Ee^{at}，a 是 k 重特征根，特解设为 t^kBe^{at}。

(7) 自由项为 $e^{at}P_\lambda(t)$，a 不是特征根，特解设为 $e^{at}Q_\lambda(t)$。

(8) 自由项为 $e^{at}P_\lambda(t)$，a 是 k 重特征根，则特解可以设为 $t^ke^{at}Q_\lambda(t)$。

(9) 自由项为 $E\cos\omega t$ 或 $E\sin\omega t$，$\pm j\omega$ 不是特征根，则特解可设为 $B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t$。

(10) 自由项为 $E\cos\omega t$ 或 $E\sin\omega t$，$\pm j\omega$ 是 k 重特征根，则特解可设为 $t^k(B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t)$。

(11) 自由项为 $P_\lambda(t)\cos\omega t+P_s(t)\sin\omega t$，$\pm j\omega$ 不是特征根，则特解可设为 $Q_l(t)\cos\omega t+G_l(t)\sin\omega t$。

(12) 自由项为 $P_\lambda(t)\cos\omega t + P_s(t)\sin\omega t$，$\pm j\omega$ 是 k 重特征根，则特解可设为 $t^k[Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t]$。

(13) 自由项为 $e^{at}[P_\lambda(t)\cos\omega t + P_s(t)\sin\omega t]$，$a \pm j\omega$ 不是特征根，则特解可设为 $e^{at}[Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t]$。

(14) 自由项为 $e^{at}P_\lambda(t)\cos\omega t + P_s(t)\sin\omega t$，$a \pm j\omega$ 是 k 重特征根，则特解可设为 $t^k e^{at}[Q_l(t)\cos\omega t + G_l(t)\sin\omega t]$。

注：这里，B，B_1，B_2 为待定系数；$P_\lambda(t)$ 为 λ 次多项式；$P_s(t)$ 为 s 次多项式；$l = \max\{\lambda, s\}$；$Q_\lambda(t)$ 为 λ 次多项式；$Q_l(t)$ 和 $G_l(t)$ 为 l 次多项式。

3. 求起始状态到初始条件的跳变

(1) 目测法。适用于简单的二阶以下的线性常系数微分方程，且自由项中不含 $\delta(t)$ 的各阶导数项，即不含冲激偶。

(2) 冲激函数平衡法。适用于任何线性常系数微分方程。

4. 当 $e(t)$ 最高求导次数 m 不低于微分方程阶次 n，求 $h(t)$ 和 $g(t)$

(1) 对于冲激响应来说：除了零输入响应部分外，$h(t)$ 还包含 $\delta(t)$ 和其导数项，最高为 $m-n$ 次。

(2) 对于阶跃响应来说：当 $n \geqslant m$ 时，$g(t)$ 不含 $\delta(t)$ 项；当 $n < m$ 时，$g(t)$ 含有 $\delta(t)$ 及其导数项，最高为 $m-n-1$ 次。

5. 用扩展的线性时不变特性求解

(1) 特性一：零状态响应满足线性、时不变和微积分特性。

(2) 特性二：零输入响应对起始状态满足线性关系。

(3) 充分利用上述两条特性，列写方程组，最终求解问题。

6. 利用卷积定义求卷积

(1) 注意充分利用数轴来确定分界点，分区间求解。

(2) 注意积分上下限的确定。

7. 求解用算子符号表示的微分方程

(1) 通常可先将算子方程转换为普通的微分方程求解。

(2) 简单的算子方程可用类似求拉氏逆变换的方法求解。

8. 理解和应用连续时间 LTI 系统特征函数为 e^{st} 的性质

(1) 若用 T 表示线性时不变系统，则 $\mathrm{T}[e^{st}] = \lambda e^{st}$。

(2) λ 是与 e^{st} 有关的 T 的特征值，$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{st}\mathrm{d}t$。

三、考点

1. 根据电路图或仿真框图建立微分方程

2. 时域经典法求解微分方程，步骤如下：

(1) 列出特征方程，求出特征根；

(2) 根据特征根，设齐次解形式；

(3) 根据自由项和特征根情况，设特解形式；

(4) 将特解形式代入，求出待定系数，确定特解；

(5) 写出完全解形式，其中有 n 个齐次解系数待定；

(6) 确定初始条件；

(7) 利用初始条件确定待定系数；

(8) 写出完全解，注意注明 $t > 0$。

3. 求起始状态、初始条件或跳变值

4. 求卷积

(1) 简单的卷积可用卷积性质求解。

(2) 稍复杂的卷积可用定义和画图法求解，关键在于确定各种情况下的积分区间。

(3) 了解复杂卷积的数值法求解原理和过程。

(4) 证明卷积的其他性质，如面积特件、移位特性和尺度变换特性等等。

5. 求零输入响应

6. 求零状态响应

(1) 已知激励和微分方程，求零状态响应。

(2) 已知激励和系统框图，求零状态响应。

(3) 已知激励和冲激响应，求零状态响应。

7. 求冲激响应

(1) 已知系统框图，求总冲激响应。

(2) 已知微分方程，求冲激响应。

(3) 已知其他条件，求冲激响应(综合类题型)。

8. 利用冲激响应判断系统的记忆性、稳定性和因果性

9. 求阶跃响应

10. 利用线性时不变性质求解

11. 求解用算子符号表示的微分方程

第二节　巩固练习

1. 对图 2-1 所示电路图，分别列写求电压 $u_0(t)$ 的微分方程。

2. 图 2-2 是汽车底盘缓冲装置模型图，高度 $z(t) = y(t) + y_0$，其中 y_0 是弹簧不受力时的位置。缓冲器等效为弹簧与减震器并联组成，刚度系数和阻尼系数分别为 k 和 f。由于路面凹凸不平(表示为 $x(t)$ 的起伏)通过缓冲器间接作用到汽车底盘，使汽车振动减弱。求汽车底盘的位移量 $y(t)$ 和路面不平度 $x(t)$ 之间的微分方程。

3. 求下列微分方程的齐次解形式：

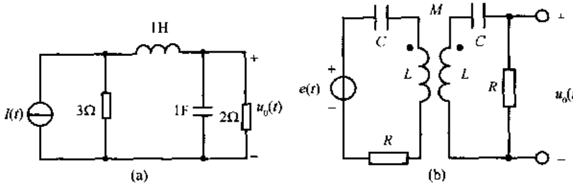

图 2-1

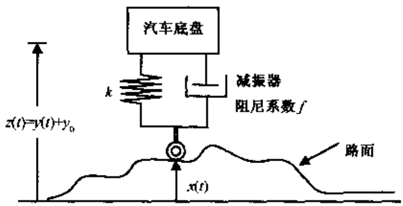

图 2-2

(1) $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+3e(t)$

(2) $\frac{d^3}{dt^3}r(t)+7\frac{d^2}{dt^2}r(t)+16\frac{d}{dt}r(t)+12r(t)=e(t)$

(3) $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+2\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)$

4. 求下列微分方程在各种情况下的特解：

(1) $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{d}{dt}e(t)+e(t)$

1) $e(t)=t^2$ 2) $e(t)=e^{-t}u(t)$ 3) $e(t)=e^{-2t}u(t)$

(2) $\frac{d^2}{dt^2}r(t)+4r(t)=e(t)$

1) $e(t)=2\cos 2tu(t)$ 2) $e(t)=e^{-t}\cos 2tu(t)$ 3) $e(t)=e^{-t}u(t)$

5. 已知$\frac{d^2}{dt^2}i(t)+7\frac{d}{dt}i(t)+10i(t)=\frac{d^2}{dt^2}e(t)+6\frac{d}{dt}e(t)+4e(t)$,$e(t)=2+2u(t)$,$i(0_-)=\frac{4}{5}$,$i'(0_-)=0$,求初始条件 $i(0_+)$,$i'(0_+)$。

6. 已知电路图 2-3,$t=0$ 开关从 1 到 2,求 $i(0\ )$,$i'(0\ )$,$i(0_+)$,$i'(0_+)$。

7. 已知系统满足微分方程$\frac{d^2}{dt^2}r(t)+3\frac{d}{dt}r(t)+2r(t)=\frac{de(t)}{dt}+e(t)$,

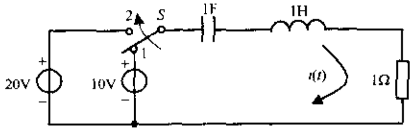

图 2-3

$e(t) = e^{-t}u(t), r(0_+) = 1, r'(0_+) = 0$，求零输入响应 $r_{zi}(t)$。

8. 已知$\frac{d^2}{dt^2}r(t) + 3\frac{d}{dt}r(t) + 2r(t) = \frac{de(t)}{dt} + e(t), e(t) = e^{-t}u(t)$，求零状态响应 $r_{zs}(t)$。

9. 二阶连续 LTI 系统对 $r(0_-) = 1, r'(0_-) = 0$ 起始状态的零输入响应为 $r_{zi1}(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$；对 $r(0_-) = 0, r'(0_-) = 1$ 起始状态的零输入响应为 $r_{zi2}(t) = e^{-t} - e^{-2t}$；系统对激励 $e(t) = e^{-3t}u(t)$ 的零状态响应 $r_{zs3}(t) = (0.5e^{-t} - e^{-2t} + 0.5e^{-3t})u(t)$，求系统在 $r(0_-) = 2, r'(0_-) = -1$ 起始状态下，对激励 $e(t) = \delta(t) - 3e^{-3t}u(t)$ 的完全响应。

10. 设一个连续时间系统的输入 $e(t)$ 与输出 $r(t)$ 之间的关系如下：

$$\frac{dr(t)}{dt} + ar(t) = e(t)$$

其中，a 为不等于 0 的常数。(下面的线性和时不变含义是指第一章意义上的线性和时不变含义。)

(1) 证明：如果 $r(0) = r_0 \neq 0$，则系统是非线性的；

(2) 证明：如果 $r(0) = 0$，则系统是线性的；

(3) 证明：如果 $r(0) = 0$，则系统是时不变的。

11. 对第 10 题中的系统，其中 $r(0) = 0$。

(1) 不利用冲激响应 $h(t)$，求该系统的阶跃响应 $g(t)$；

(2) 根据 $g(t)$ 求冲激响应 $h(t)$。

12. 设系统为 $r'(t) + 2r(t) = e(t) + e'(t)$，求系统的冲激响应 $h(t)$。

13. 图 2-4 所示系统是由几个“子系统”组成，各子系统的冲激响应分别为：$h_1(t) = u(t)$(积分器)；$h_2(t) = \delta(t-1)$(单位延时)；$h_3(t) = -\delta(t)$(倒相器)。

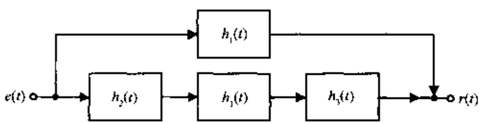

图 2-4

试求总系统的冲激响应 $h(t)$。

14．求下列两组卷积，并注意相互间的区别：

(1) $f(t)=u(t)-u(t-1)$，求 $s(t)=f(t)*f(t)$；

(2) $f(t)=u(t-1)-u(t-2)$，求 $s(t)=f(t)*f(t)$。

15．设 $r(t)=e^{-t}u(t)*\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-3k)$，证明 $r(t)=Ae^{-t}, 0\leqslant t\leqslant 3$，并求出 A 值。

16．求下列各函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积 $f_1(t)*f_2(t)$：

(1) $f_1(t)=u(t), f_2(t)=e^{-\alpha t}u(t)$

(2) $f_1(t)=\delta(t), f_2(t)=\cos(\omega t+45^\circ)$

(3) $f_1(t)=(1+t)[u(t)-u(t-1)], f_2(t)=u(t-1)-u(t-2)$

(4) $f_1(t)=\cos(\omega t), f_2(t)=\delta(t+1)-\delta(t-1)$

17．试求下列各值，其中 $p=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 为微分算子，系统起始状态为0。

(1) $\dfrac{A}{p+\alpha}\delta(t)$　(2) $\dfrac{A}{p+\alpha^2}\delta(t)$　(3) $\dfrac{A}{(p+\alpha)(p+\beta)}\delta(t)$

提　高　篇

第一节　习题精解

1．图2-5所示为理想火箭推动器模型。火箭质量为 m_1，荷载质量为 m_2，两者中间用刚度系数为 k 的弹簧相联结。火箭和荷载舱各自受到摩擦力的作用，摩擦系数分别为 f_1 和 f_2。求火箭推动力 $e(t)$ 与荷载舱运动速度 $v_2(t)$ 之间的微分方程表示。

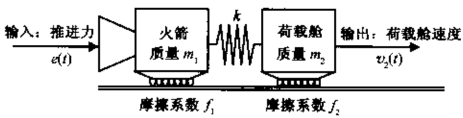

图2-5

思路和技巧　利用胡克定律、牛顿第二定律、摩擦力公式等元件约束特性，再利用机械系统网络拓扑约束——达朗贝尔原理建立微积分方程组，最终化简出所需的微分方程。

解　由胡克定律、牛顿第二定律、摩擦力公式及达朗贝尔原理得

$$\begin{cases} e - f_1 v_1 - k\int (v_1 - v_2)\mathrm{d}t = m_1 \dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} & (1) \\ k\int (v_1 - v_2)\mathrm{d}t - f_2 v_2 = m_2 \dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} & (2) \end{cases}$$

由式(2)可得

$$k\int v_1 \mathrm{d}t = k\int v_2 \mathrm{d}t + f_2 v_2 + m_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} \Rightarrow v_1 = v_2 + \frac{f_2}{k}\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} + \frac{m_2}{k}\frac{\mathrm{d}^2 v_2}{\mathrm{d}t^2} \qquad (3)$$

由式(2)还可得

$$k\int (v_1 - v_2)\mathrm{d}t = f_2 v_2 + m_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} \qquad (4)$$

把式(3)和式(4)代入式(1)可得

$$e - f_1\left(v_2 + \frac{f_2}{k}\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} + \frac{m_2}{k}\frac{\mathrm{d}^2 v_2}{\mathrm{d}t^2}\right) - f_2 v_2 - m_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$$

$$= m_1\left(\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} + \frac{f_2}{k}\frac{\mathrm{d}^2 v_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m_2}{k}\frac{\mathrm{d}^3 v_2}{\mathrm{d}t^3}\right)$$

$$\Rightarrow f_2 v_2 + m_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} + f_1 v_2 + \frac{f_1 f_2}{k}\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} + \frac{f_1 m_2}{k}\frac{\mathrm{d}^2 v_2}{\mathrm{d}t^2} + m_1 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} +$$

$$\frac{m_1 f_2}{k}\frac{\mathrm{d}^2 v_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{m_1 m_2}{k}\frac{\mathrm{d}^3 v_2}{\mathrm{d}t^3} = e(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^3 v_2}{\mathrm{d}t^3} + \frac{m_1 f_2 + m_2 f_1}{m_1 m_2}\frac{\mathrm{d}^2 v_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{(m_1 + m_2)k + f_1 f_2}{m_1 m_2}\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} + \frac{(f_1 + f_2)k}{m_1 m_2} v_2 = \frac{ke}{m_1 m_2}$$

2. 如图 2-6 所示的连续时间系统由两个积分器和两个比例乘法器构成。求输入 $e(t)$ 与输出 $r(t)$ 之间的微分方程。

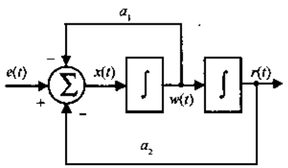

图 2-6

思路和技巧　由仿真系统求微分方程，通常选择加法器输出作为中间变量，经过化简得到最终微分方程，连续时间系统的阶数等于系统中积分器的个数。

解　设 $x(t)$ 和 $w(t)$ 分别是图 2-6 中第一个积分器的输入和输出。第一个积分器的输入为

$$x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w(t) \qquad (1)$$

也可以写为

$$x(t) = -a_1 w(t) - a_2 r(t) + e(t) \qquad (2)$$

因为 $r(t)$ 是图 2-6 中第二个积分器的输出，则有

$$w(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t) \qquad (3)$$