第三章　静电能

§3.1 真空中点电荷间的相互作用能

§3.2 连续电荷分布的静电能

§3.3 电荷体系在外电场中的静电能

§3.4 **电场的能量和能量密度**

*§3.5 非线性介质及电滞损耗

*§3.6 利用静电能求静电力

静电能的定义

建立一个带电系统的过程中，总伴随着电荷相对运动，需要外力克服电荷间的相互作用而作功。外力作功所消耗的能量将转换为带电系统的能量，该能量定义为带电系统的静电能。显然，静电能应由系统的电荷分布决定。

例如，第一章中已讲到的点电荷在外电场中的电势能就是静电能。

能量的基本概念

一、引入的目的：

1. 能量是物质的共同属性，是物质运动的普遍量度；
2. 能量守恒定律是最有意义、最有用的发现之一；
3. 便于研究不同形式能量的转换。

二、特点：

1. 是状态的单值函数， 属于整个系统；
2. 能量差才有意义；
3. 用做功来量度能量。

三、描述的方法：

按照其特点，要引入状态参量，规定零点能，然后用做功来计算能量。

§3.1 真空中点电荷间的相互作用能

- 设想空间中有多个点电荷，其带电量用 q_i 表示，初始时刻相互间距离为 ∞，相互作用的库仑力为 0。随后，外力克服库仑力做功，使它们到达相应的位置 $\mathbf{r}_i$，任意两个点电荷间的距离可以由 $r_{ij}=|\mathbf{r}_{ij}|=|\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i|$ 给出。这外力做功便转换成该点电荷系的能量，即静电能。
- 所谓点电荷之间的相互作用能，指的就是与点电荷间的**相对位置**有关的静电能。

- 因此，状态参量取为$\mathbf{r}_{ij}$（$i, j = 1,2,\ldots,N$），初始时刻 $r_{ij} \to \infty$ ，相互作用的库仑力为零，它们之间的静电相互作用消失，很自然地取这种状态的相互作用能为零。
- 下面，我们用一种类似于数学归纳法的办法来计算由N个点电荷组成的静电体系的静电能。

两个点电荷时

- 一个点电荷q在外电场U中的电势能$W=qU$
- 设电势U是由另一个点电荷Q产生的，于是点电荷q具有的电势能可以写作

$$W = qU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

- 同样地，上式也表示了Q在q的电场中的电势能；这电势能W即静电能，属于点电荷q与Q组成的系统。

- **当两个点电荷**分别为q_1和q_2时，静电能为：

$$W_{12}=q_2U_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_1}{r_{12}},$$

同样地，

$$W_{21}=q_1U_{21}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r_{12}}=W_{12},$$

可将两个点电荷的静电能记为W_2，为方便写成：

$$W_2=\frac{1}{2}(W_{12}+W_{21})=\frac{1}{2}(q_2U_{12}+q_1U_{21}),$$

- **三个点电荷的静电能**记为W_3，便为：

$$W_3=\frac{1}{2}(W_{12}+W_{21}+W_{13}+W_{31}+W_{23}+W_{32})$$

■ 于是可写成：

$$W_3 = \frac{1}{2}(W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32})$$

$$= \frac{1}{2}(q_2 \underline{U_{12}} + q_1 \underline{U_{21}} + q_3 \underline{U_{13}} + q_1 \underline{U_{31}} + q_3 \underline{U_{23}} + q_2 \underline{U_{32}})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_i U_i, \quad \text{其中} \quad U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} U_{ji} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} \frac{q_j}{r_{ji}},$$

■ U 代入 W：

$$\boxed{W_3 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3}\sum_{i=1}^{3} \frac{q_i q_j}{r_{ji}},}$$

对N个点电荷系统：

$$W_N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_iU_i,\text{ 其中 } U_i=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}U_{ji}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{r_{ji}},$$

U_i 是除了q_i 其它点电荷在q_i 处产生的电势的和。

同理，将U代入W 得：

$$W_N=\frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{i=1}^{N}q_iU_{ji}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}.$$

对N+1个点电荷系统，可证（见书p68）：

$$W_{N+1}=\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N+1}\sum_{i=1}^{N+1}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}\overset{\text{记为}}{=}\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{j,i=1\\ j\neq i}}^{N+1}\frac{q_iq_j}{r_{ji}}.$$

§3.2 连续电荷分布的静电能

首先讨论空间只有自由电荷的情形，这意味着电场空间中只允许导体和介电常量恒等于ε_0的物体（包括真空）存在。

1. 先考虑体电荷分布的情况，电荷密度设为$\rho_e(\mathbf{r})$。将该体电荷无限分割并把每一小部分当作点电荷处理，则由前页结论可得：

$$W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho_e(\mathbf{r})U_1(\mathbf{r})dV, \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

$U_1(\mathbf{r})$表示除$\rho_e(\mathbf{r})dV$外其余所有电荷在$\mathbf{r}$处产生的电势。

■ 分析$U_1(\mathbf{r})$和总电势$U(\mathbf{r})$的关系。**设dV 为一球体元**，**由第1.7节例1.11的结果**（**P28**），取$R_1 = 0$，$R_2 = a$。可求得电荷密度为ρ_e、半径为a的均匀带电球体在球内产生的电势为：

$$U' = \frac{\rho_e}{6\varepsilon_0}\left(3a^2 - r^2\right),$$

它在球心处取极大值 $U'_m = \rho_e a^2 / 2\varepsilon_0$，故当$a \to 0$时有 $U'_m \to 0$ 即 $\boxed{U' \to 0}$ 。于是，$U_1(\mathbf{r}) \approx U(\mathbf{r})$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2}\iiint_V \rho_e(\mathbf{r})U(\mathbf{r})dV.} \qquad \textbf{(3.2.2)}$$

2. 对面电荷分布的情形，设面电荷密度为 $\sigma_e(\boldsymbol{r})$ 。类似，将面电荷无限分割为圆状面电荷元 $\sigma_e(\boldsymbol{r})dS$ ，它在自身产生的电势不会大于 $\sigma_e a/2\varepsilon_0$（$a$为面元半径，见**P26**的第**1.7**节例**1.10**），该电势随 $dS\to 0(a\to 0)$而趋于零。

于是，$U_1(\boldsymbol{r}) \approx U(\boldsymbol{r})$，其静电能为：

$$W_e = \frac{1}{2}\iint_S \sigma_e(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dS \qquad \textbf{(3.2.3)}$$

3. 线电荷分布的情况，不能将静电能写为：

$$W_e = \frac{1}{2}\int_L \lambda_e(l)U(l)dl \quad \text{或} \quad W_e = \frac{1}{2}\int_L \lambda_e(l)U_1(l)dl$$

因为 $\lambda_e(l)dl$ 在自身所在处产生的电势不仅不趋于零，而且会按 $\ln r$（r为离线元dl的垂直距离）趋于无穷。进一步，可证$U_1(l)$也会趋于无穷大。

这在物理上意味着：要把电荷从极端分散状态压缩到一条几何线上，外界需要作无穷大的功。这显然是办不到的。因此，在计算静电能时，无论线径怎样小的带电体均不能当作线电荷处理。

4. 多个带电体组成的系统的静电能。设有N个带电体，体积分别为V_1，V_2…，V_N。可将空间的总电势$U(\mathbf{r})$分为两部分(请思考！为什麽?)

$$U(\mathbf{r}) = U_i(\mathbf{r}) + U^{(i)}(\mathbf{r}),$$

式中$U_i(\mathbf{r})$表示除第i个带电体外其余所有带电体在 $\mathbf{r}$ 处产生的电势，$U^{(i)}(\mathbf{r})$则表示第i个带电体在 $\mathbf{r}$ 处产生的电势。按照前述结论，可得：

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_e(\mathbf{r})U(\mathbf{r})dV = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iiint_{V_i}\rho_e(\mathbf{r})[U_i(\mathbf{r}) + U^{(i)}(\mathbf{r})]dV$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\iiint_{V_i}\rho_e(\mathbf{r})U^{(i)}(\mathbf{r})dV + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\iiint_{V_i}\rho_e(\mathbf{r})U_i(\mathbf{r})dV,$$

可写成：

$$W_e = W_{自} + W_{互},$$

其中，

$$W_{自} = \sum_{i=1}^{N} W_{自}^{(i)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U^{(i)}(\mathbf{r}) dV,$$ 叫**自能**

$$W_{互} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}) dV.$$ 叫**互能**

点电荷间、线电荷间可以计算互能。但是，不能计算点电荷、线电荷的自能（为无穷大）。

[例3.1]　求体电荷密度为 ρ_e 、半径为R 的均匀带电球的静电能（带电体的介电常量设为 ε_0 ）。

[解]　以球心为原点，取球坐标（ r,θ,φ ）。根据第一章1.7节例1.11的结果取$R_1=0$，$R_2=R$，可得：

$$U(\boldsymbol{r})=\frac{\rho_e}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)$$

于是，积分得：

$$W_e=\frac{1}{2}\iiint\limits_{r\le R}\rho_e\cdot\frac{\rho_e}{6\varepsilon_0}(3R^2-r^2)r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\frac{4\pi\rho_e^2R^5}{15\varepsilon_0}.$$

当 ρ_e 固定时，We将随 $R\to 0$ 而趋于零，因电量也趋于零。如果用总电量 $q=4\pi R^3\rho_e/3$ 表示，上述结果可写成：

$$W_e=\frac{3}{5}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right).$$

这时若固定q，当 $R\to 0$ ，则 $W_e\to\infty$ ，即点电荷的自能发散。

5. 对带电导体，静电能公式可进一步简化。导体的特点是**电荷分布在外表面**，**整个导体是等势体**。当求 N 个带电导体组成的体系的静电能时，应用前式可得如下结果：

$$W_e=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\iint_{S_i}\sigma_e U dS=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}U_i\iint_{S_i}\sigma_e dS=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i U_i,$$

式中q_i和U_i为第 i 个导体的电量和电势。

[例3.2]　一孤立带电导体球电量为q，半径为R，求其静电能。

[解]　对孤立导体球有$U=q/C$，$C=4\pi\varepsilon_0 R$。应用上式得：

$$W_e = \frac{1}{2}qU = \frac{1}{2C}q^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\right).$$

与例**3.1**的结果比较可知，对电量及半径相同的带电球，其静电自能与电荷分布有关。电荷集中分布于球面比均匀分布于整个球体的自能要小。

■如果假设电子的能量$W = mc^2$全部来自静电自能W_e，并取$W_e \approx e^2/(4\pi\varepsilon_0 r_e)$，则可求得电子的半径：

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} \approx 2.8\times 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

r_e称为电子的经典半径。当然，电子的实际半径比r_e要小得多，因此不能作以上假设。

[例3.3] 求平行板电容器的静电能公式。

[解] 如上页图所示，极板间的均匀各向同性电介质的介电常量为ε，极板面积为S，两极板间的间距为d。接通电源后，极板带电分别为Q_1和Q_2，且$Q_2 = -Q_1 = Q$；两极板电势分别为U_1和U_2，电势差为$U = U_2 - U_1$。

■ 分析电容器充电过程，电源对电容器作功，使电源能量转化为电容器的静电能。在q由0增至Q的过程中，电源作功为：

$$A' = \int_0^Q u dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2C} Q^2 .$$

则

$$W_e = A' = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} QU ,$$

或写成：

$$W_e = \frac{1}{2} Q(U_2 - U_1) = \frac{1}{2} (Q_1 U_1 + Q_2 U_2) .$$

这与前面的普适公式的结果一致。

***6.**简单介绍**空间存在电介质**的情形，我们限于线性无损耗介质。对于这种情形，随着自由电荷的搬运和电场的建立，介质将会产生极化并出现极化电荷。

一种简单而自然的办法是把极化电荷和自由电荷同等看待，将看成是总电荷密度 $\rho_e(\boldsymbol{r})$，即自由电荷密度 $\rho_{e0}(\boldsymbol{r})$ 和极化电荷密度 $\rho_e'(\boldsymbol{r})$ 之和，然后按前式定义系统的能量，即：

$$W_{e0}=\frac{1}{2}\iiint_{V_0}\rho_{e0}(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dV+\frac{1}{2}\iiint_{V'}\rho_e'(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dV$$

式中V_0和V'分别表示自由电荷和极化电荷所在的空间区域。我们将上面定义的能量记为W_{e0}，并把它称作**系统的“宏观静电能”**，它**可以理解为**在建立宏观电荷分布 $\rho_{e0}(\boldsymbol{r})$和 $\rho_e'(\boldsymbol{r})$过程中系统所贮存的静电能。

*■**从另一个角度来分析**，系统的能量W_e应等于在建立该指定状态过程中外界对系统所作的功A'，即：

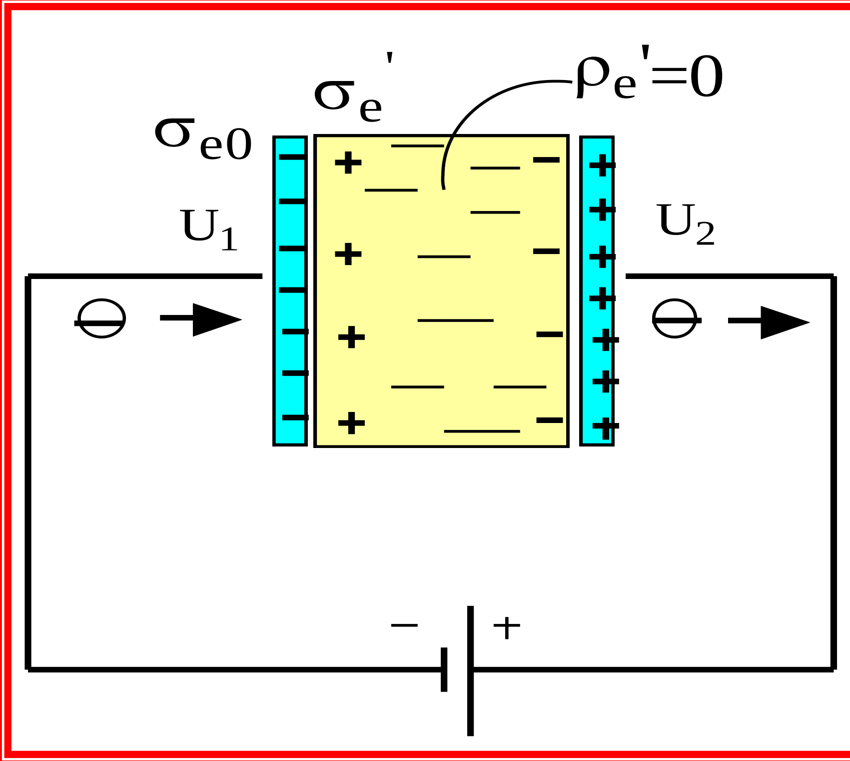
$$W_e = A'.$$

W_{e0} 是否等于W_e 呢？**否**

理由在于，在介质中建立电场时，外界不仅要克服宏观电荷（包括自由电荷和极化电荷）之间的静电力作功，而且要克服分子内部（对位移极化情形）或分子之间（对取向极化情形）的相互作用作功。**第一部分**功转化为系统的**宏观静电能**W_{e0}；**第二部分**功称为**"极化功"**，它使介质极化。

对线性无损耗介质，通过极化功转换到介质的能量称为极化能，记为 $W_{极}$。所以：$W_e = W_{e0} + W_{极}.$

*[例如]　填充了均匀介质的平行板电容器（见右下图），极板自由面电荷 σ_{e0} 和介质极化面电荷 σ'_e 对宏观静电能 W_{e0} 都有贡献；而介质体内 $\rho'_e = 0$，虽然对 W_{e0} 无贡献，**但介质内部**那些因极化发生变形或改变排列状态的原子、分子也贮存了一部分能量，并造成 σ'_e，它们相当于极化能 $W_{极}$。



正如前页所述，可定义系统的静电能为：

$$W_e = W_{e0} + W_{极}.$$

在这种定义下，外界作功正好等于系统静电能的变化。

电容器充电时电源作功

*■例3.3启发我们，系统的静电能可用**自由电荷**与**总电势**来表达。可以一般地证明（参见本书下册第二章P64）为：

$$W_e=\frac{1}{2}\iiint\limits_{V_0}\rho_{e0}(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dV.$$

物理解释：上式表示，外界在移动自由电荷过程中克服静电力作功，即对电场作功，转化为系统的静电能。
注意：U（$\boldsymbol{r}$）为总电势，自由电荷和极化电荷对它都有贡献。

进一步可推出极化能的表达式：

$$W_{极}=W_e-W_{e0}=-\frac{1}{2}\iiint\limits_{V'}\rho_e'(\boldsymbol{r})U(\boldsymbol{r})dV.$$

式中右边的负号正好表示系统（即电场）对极化电荷作功，而不是外界克服静电力作功。

§3.3 电荷体系在外电场中的静电能

- 当**已知外场U**时，**点电荷q**在U中的电势能可以直接计算：
$$W_e = qU.$$
W_e是q在外场U中的静电能，**属于相互作用能**。

- 当电荷体系为N**个点电荷**q_1，q_2，…，q_N构成的点电荷系统时，它在外电场U中的静电能为：
$$W_e = \sum_{i=1}^{N} q_i U(\boldsymbol{r}_i),$$

- 电荷密度为$\rho_e(\boldsymbol{r})$、体积为V的**带电体**，在外电场U中的静电能应为：
$$\boxed{W_e = \iiint_V \rho_e(\boldsymbol{r}) U(\boldsymbol{r}) dV.}$$

[例3.4]　求电偶极子在外电场中的静电能公式。

[解]　设电偶极子的电偶极矩为$\boldsymbol{p} = q\,\boldsymbol{l}$，则由上式可算得它在外电场$\boldsymbol{E}$ 中的静电能为：

$$W_e = -qU_- + qU_+ = q(U_+ - U_-) = q\boldsymbol{l}\cdot\nabla U,$$

即

$$\boxed{W_e = \boldsymbol{p}\cdot\nabla U = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}}$$

这也是电偶极子$\boldsymbol{p}$在外场$\boldsymbol{E}$中的**电势能**。

§3.4 电场的能量和能量密度

- 静电能贮存在哪里？

前面导出的静电能公式都与电荷相联系。这给人一种印象，似乎静电能只贮存在电荷上；而电荷周围的空间——存在电场，其静电能为零！这是早期“超距作用”的观点。

■其后人们发现能量应当贮存在电场中，电相互作用是通过电场传递，同时应传递能量，这就是“近距作用”的观点。直到电磁波（电磁场在空间的传播）传递能量被证实后，才被广泛采纳。

为与近距作用观点一致，下面我们设法将有关静电能的公式用电场强度表示出来。

先从平行板电容器的静电能公式入手：

前面已得： $W_e = \frac{1}{2}QU,$

设电容器极板间填满**均匀线性各向同性介质**，则有 $Q = \sigma_{e0}S = DS$ 和 $\boldsymbol{U = Ed}$，从而上述静电能公式可改用电场强度表示：

$$W_e = \frac{1}{2}DSEd = \frac{1}{2}DEV, \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

式中 $V = Sd$ 为两极板间的体积，即电场空间的体积。定义单位体积的静电能为电能密度，则有：

$$w_e = \frac{1}{2}DE \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

写成矢量式如下，对**线性无损耗介质**都适用：

$$w_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \tag{3.4.3}$$

式（3.4.3）表明，原认为局限于极板表面电荷之中的**静电能**，**实际上**是以电能密度**贮存于电场之中**。当空间电场不均匀时，总静电能应为：

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} dV \tag{3.4.4}$$

这样定义的静电能密度和静电能计入了介质的极化能，它**要求介质是线性无损耗的**。

[例3.5] 从电场的能量公式（**3.4.4**）出发，重新计算孤立带电导体球（电量为***q***，半径为***R***）的静电能。

[解] 由高斯定理可求得该导体球的电场强度大小为：

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2},\qquad (r\geq R);\qquad E=0,\qquad (r<R)$$

于是：

$$w_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4},\qquad (r\geq R)$$

$$W_e=\iiint_V w_e dV=\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_R^{\infty}\frac{1}{r^2}dr=\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

上述结果与例**3.2**所得结果一致。这说明，在静电场范围内，式（**3.2.3**）和式（**3.4.4**）完全等效。

最后，由式（3.4.4）进一步导出宏观静电能W_{e0}和介质极化能$W_{极}$表达式。将$D=\varepsilon_0 E+P$代入式（3.4.4）得：

$$W_e=\frac{1}{2}\iiint_V \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}dV=\frac{1}{2}\iiint_V(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})\cdot\boldsymbol{E}dV=W_{e0}+W_{极}. \quad (3.4.5)$$

式中：

$$W_{e0}=\frac{1}{2}\iiint\varepsilon_0 E^2 dV, \quad (3.4.6)$$

$$W_{极}=\frac{1}{2}\iiint\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}dV. \quad (3.4.7)$$

在静电学范围内，介质中$\varepsilon_0 E^2/2$为宏观静电能密度，$\mathrm{P}\cdot\mathrm{E}/2$为极化能密度，二者之和等于静电能密度：

$$w_e=\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}/2$$

*§3.5 非线性介质及电滞损耗

前面我们一再强调，所导出的静电能公式仅适用于线性无损耗介质。下面自然要问：**对非线性有损耗介质又该作何处理呢?**

仍限于平行板电容器填满均匀各向同性介质的情况。在例**3.3**中，我们曾对电容器**充电过程**中电源所作的元功作过分析，结果为：

$$\boxed{dA' = udq,} \quad \textbf{(3.5.1)}$$

由极板内部 **E=0**和极板内、外侧电场强度切向分量连续的条件，电场强度切向分量为零，可推断只有垂直于极板的分量。因此，如下关系式成立：

$$u = El, \qquad q = \sigma_{e0} S = D_n S$$

代入式（**3.5.1**）得：

$$dA' = (E dD_n) Sl = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{D} V. \qquad \textbf{(3.5.2)}$$

于是对单位体积的电介质，电源所作的元功为：

$$da' = \frac{dA'}{V} = \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{D}. \qquad \textbf{(3.5.3)}$$

由 $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ ，可将上式改写为：

$$da' = d\left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \right) + \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{P}, \qquad \textbf{(3.5.4)}$$

物理意义是：电源所作的功一部分用来增加宏观静电能密度，另一部分为对介质所作的**极化元功**。

要分析极化功的具体形式及其后果，必须考虑介质的极化规律，即$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{E}$ 的函数关系。

*■对线性无损耗介质，可将极化规律写成如下一般形式：

$$P_i = \sum_{j=1}^{3} \chi_{ij}\varepsilon_0 E_j, \qquad \chi_{ij} = \chi_{ji} \qquad \textbf{(3.5.5)}$$

特别对各向同性介质有：

$$\chi_{11} = \chi_{22} = \chi_{33} = \chi_e, \qquad \chi_{12} = \chi_{13} = \chi_{23} = 0.$$

由式（**3.5.5**）可证：

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\chi_{ij}\varepsilon_0 E_i dE_j = \sum_{j=1}^{3}(dE_j\sum_{i=1}^{3}\chi_{ji}\varepsilon_0 E_i) = \sum_{j=1}^{3}P_j dE_j = \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{E}$$

于是有 $d(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{E} = 2\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P},$

或

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P}=d\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{E}\right). \qquad (3.5.6)$$

上式表明，极化功全部转换为介质的极化能。

将式（3.5.6）代入式（3.5.4），得：

$$da' = d(\varepsilon_0 E^2 / 2) + d(\boldsymbol{P}\bullet\boldsymbol{E} / 2) = d(\boldsymbol{D}\bullet\boldsymbol{E} / 2).$$

推得如下关系式：

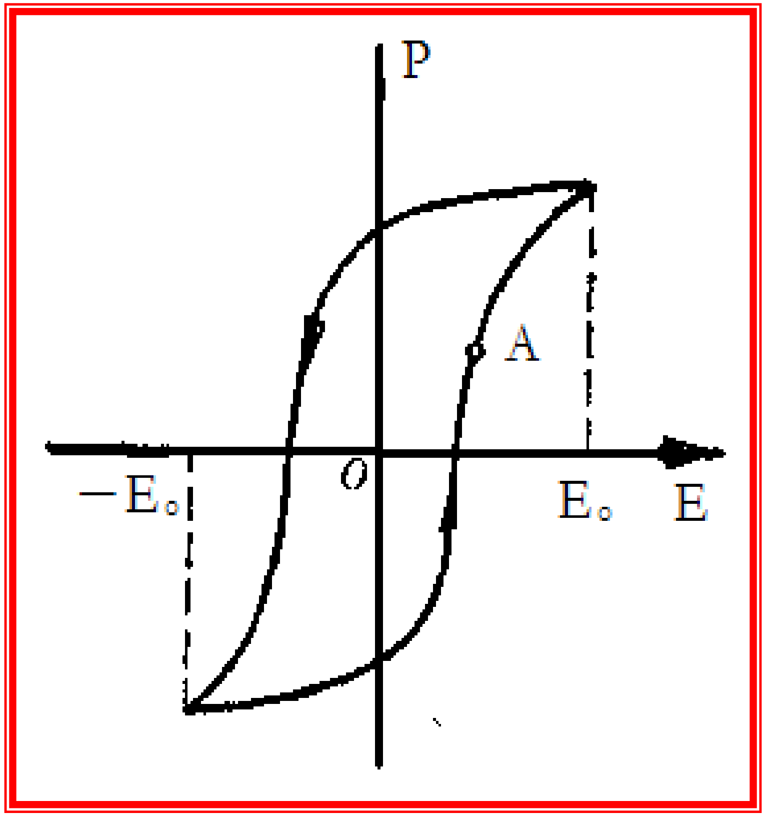
$$da' = dw_e, \qquad (3.5.7)$$

即电源作功全部转化为电容器的静电能。

■ **对非线性有损耗介质**，式（3.5.5）与（3.5.6）不再成立，显然不会得到上述简单结果。当介质为非线性有损耗时，极化能密度的表达式将会发生变化，这时一般不再把宏观静电能和极化能合在一起考虑。

当**存在介质损耗**时，极化功中只有**一部分**转化为极化能，**另一部分**则转化为热量。

■例如**铁电体**就属于这种情况。铁电体的 P 和 E 的关系不仅是非线性的，而且是非单值的，一定的 E 所对应的 P 值**依赖于极化过程**。



极化过程是不可逆过程。

当从某点***A***出发沿着电滞回线循环一周回到***A***点时，电源对单位体积铁电体所作的功可由式（**3.5.4**）求得：

$$a' = \oint da' = \cancelto{0}{\oint d\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right)} + \oint E dP$$

$$= \oint E dP. \qquad \textbf{(3.5.8)}$$

$$a' = \oint da' = \oint E dP. \quad \textbf{(3.5.8)}$$

式中右边沿电滞回线的闭路积分正好等于电滞回线所围的“**面积**”。这部分功既不改变电场**E**，又不改变介质的极化状态**P**，而是**转化为热量**，使介质发热。这部分因电滞现象而消耗的能量，称为**电滞损耗**。

*§3.6 利用静电能求静电力

- 利用静电能可求得静电场中的静电力.
- *N*个带电导体组成的带电系统，**设想**某一个导体在其他导体的作用下，受到静电力 $\boldsymbol{F}$，位移 $\delta\boldsymbol{r}$，则静电力$\boldsymbol{F}$ 所作的功为:

$$\delta A=\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}=F_x\,\delta x+F_y\delta y+F_z\delta z \quad \textbf{(3.6.1)}$$

- 分**两种情形**讨论:

（1）带电体的**电量不变**，即不接电源，为孤立系统;

（2）带电体的**电势不变**，接电源。

（1）孤立系统，带电体的电量不变

- 位移 δr 只改变各导体的电势，使系统的静电能发生变化，
- 由能量守恒：即静电力所作的功等于系统静电能的减少， $\delta A = -(\delta W_e)_Q$

$$\therefore (\delta W_e)_Q = -\delta A \qquad (3.6.2)$$

将(3.6.1)代入上式：$(\delta W_e)_Q = -(F_x\,\delta x + F_y\,\delta y + F_z\,\delta z)$

- 由数学知：

$$\boxed{\therefore F_x = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_Q \quad \text{或} \quad \mathbf{F} = -(\nabla W_e)_Q} \qquad (3.6.3)$$

（2）接电源，带电体的电势不变

- 系统不是孤立的，外界（电源）通过给系统的导体提供电荷而作功 $\delta A'$， 由**能量守恒定律**知系统静电能的变化为：

$$\delta W_e = -\delta A + \delta A' \qquad \textbf{(3.6.4)}$$

- 电源使各导体的电势 U_i 保持恒定，设当导体位移 δr 时，各导体的电量会在电源的作用下变化 δQ_i，则电源对系统作功为：

$$\delta A' = \sum_{i=1}^{N} U_i \delta Q_i \qquad \textbf{(3.6.5)}$$

- 又系统静电能变化，由前静电能公式可得：

$$(\delta W_e)_U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} U_i \delta Q_i \qquad \textbf{(3.6.6)}$$

■比较上两式，得**外接电源作功**是**静电能变化**的**两倍**：

$$\delta A' = 2(\delta W_e)_U \qquad (3.6.7)$$

■代入式（3.6.4）右边，并将该式左边的 δW_e 代之以 $(\delta W_e)_U$ 得：

$$(\delta W_e)_U = \delta A \qquad (3.6.8)$$

它表示当维持各导体的电势不变时，**静电力作功等于系统静电能的增加**。

■按（1）中推导

$$\boxed{\therefore F_x = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_U \quad 或 \quad \mathbf{F} = (\nabla W_e)_U} \qquad (3.6.9)$$

■**说明**： 所有由静电能求静电力的表达式，包括已经得到的式（**3.6.3**）和式（**3.6.9**），是彼此等效的，即对**同一个静电力计算问题**会给出同一答案。

原因很简单，对任何给定的带电系统，其中某个带电导体所受的静电力是**由当时系统的电荷分布状态**通过**库仑定律唯一决定**的，它与系统状态以后的变化无关。因此，就可以随意设想一种系统状态的变化，只要便于计算。

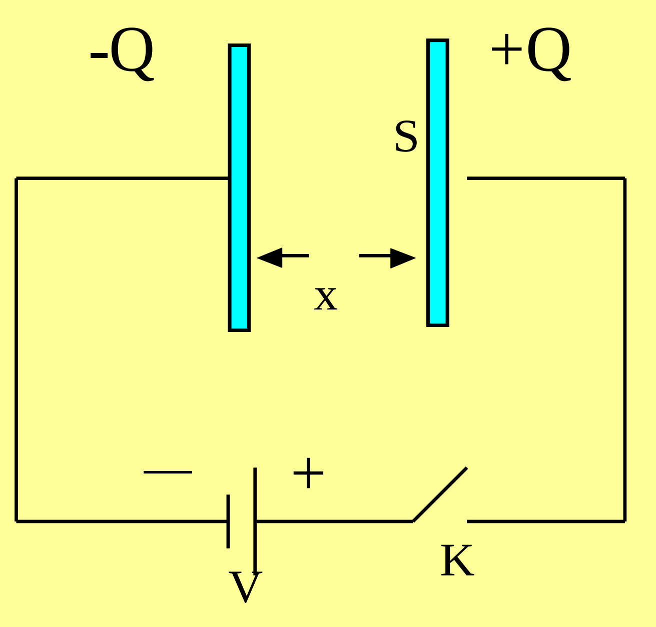
同理可推得静电力矩公式

- 只要将位移$\delta \boldsymbol{r}$换成角位移$\delta\theta$，静电力做功：

$$\delta A = \boldsymbol{L}_{\theta} \cdot \delta\theta$$

- $$\boxed{L_{\theta} = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial \theta}\right)_Q \quad , \quad L_{\theta} = \left(\frac{\partial W_e}{\partial \theta}\right)_U}$$

[例3.6]真空平行板电容器，极板面积为S，相距为 x，充电至电压U=V，求带正电极板所受的力。



[解]电容器的静电能:

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{CU^2}{2}$$

若K断开， Q不变

$$F_x = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_Q = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)\right]_Q = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}$$

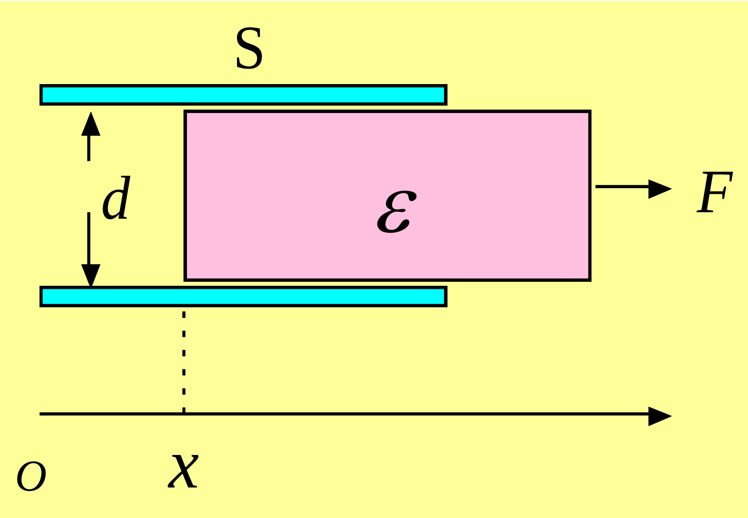
若K闭合， U不变

$$F_x = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_U = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{CU^2}{2}\right)\right]_Q = \frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}$$

两式的计算结果相同，将$c=\varepsilon_0 S/x$代入，负号表示两极板的引力:

$$F_x = -\frac{\varepsilon_0 S V^2}{2x^2} = -\frac{SD^2}{2\varepsilon_0} = -\frac{S\sigma_{e0}^2}{2\varepsilon_0}.$$

[例3.7] 平行板电容器极板面积为**S**, 极板间距为**d**, 其间充满介电常数为**ε**的介质，求将介质从极板间完全取出时外力所作的功：（**1**）*U*不变；（**2**）*Q* 不变。



[解]用 **x** 表示介质从极板间移出的距离

- X=0时，$C_1=\varepsilon S/d$，介质充满；
- X=ℓ 时，$C_2=\varepsilon_0 S/d$，介质全部抽出。

（**1**）*U*不变时，

静电力：$$F_x=\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_U=\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}$$

外力作功：

$$A_1'=\int F'dx=-\int Fdx=-\int_{C_1}^{C_2}\frac{U^2}{2}dC=\frac{1}{2}U^2(C_1-C_2)=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)S}{2d}U^2$$

（2） Q 不变时，静电力：$F_x = -(\frac{\partial W_e}{\partial x})_Q = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{\partial C}{\partial x}$

外力作功：

$$A_2' = -\int F dx = -\int_{C_1}^{C_2} \frac{Q^2}{2C^2} dC = \frac{(C_1 - C_2)Q^2}{2C_1 C_2} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}(C_1 U)^2 = \frac{\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_0)S}{2\varepsilon_0 d}U^2 \neq A_1'$$

说明： **这是两种不同的真实物理过程**

（1）*U*不变，接电源。外力作正功，电容器电能却减少。

$$\Delta W_{e1} = \frac{1}{2}U^2(C_2 - C_1) = -A_1' < 0$$

抽出电介质时，电容减小,极板电量变小，**对电源充电**. 外力作功和电容器减少的静电能全部转化为电源的储能.

（2）Q不变，孤立系。外力作功等于电容器电能的增加。

$$\Delta W_{e2} = \frac{1}{2}Q^2(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}) = A_2' > 0$$

[例3.8]平行板电容器极板面积为S, 极板间距为d, 插入介电常数为ε、密度为ρ的液体介质中， 维持电容器的电压U不变，求液面在电容器中上升的高度h。

[解] 这是静电力与重力平衡的问题，设极板高为$b=b_1+b_2$，宽为a, $S=ab$, b_1为电容器中液柱高, b_2为电容器中空气柱高

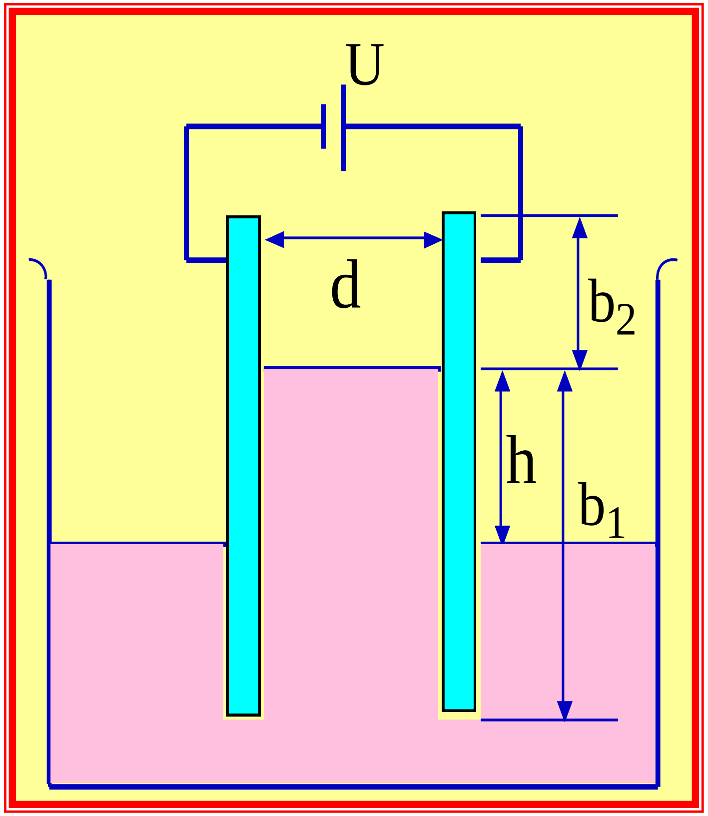
$$C=\frac{(b_1\varepsilon+b_2\varepsilon_0)a}{d}=\frac{[b\varepsilon_0+b_1(\varepsilon-\varepsilon_0)]a}{d}$$

$$F=\left(\frac{\partial W_e}{\partial b_1}\right)_U=\frac{U^2}{2}\frac{\partial C}{\partial b_1}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)aU^2}{2d}$$

平衡时, $F=mg$, g为重力加速度

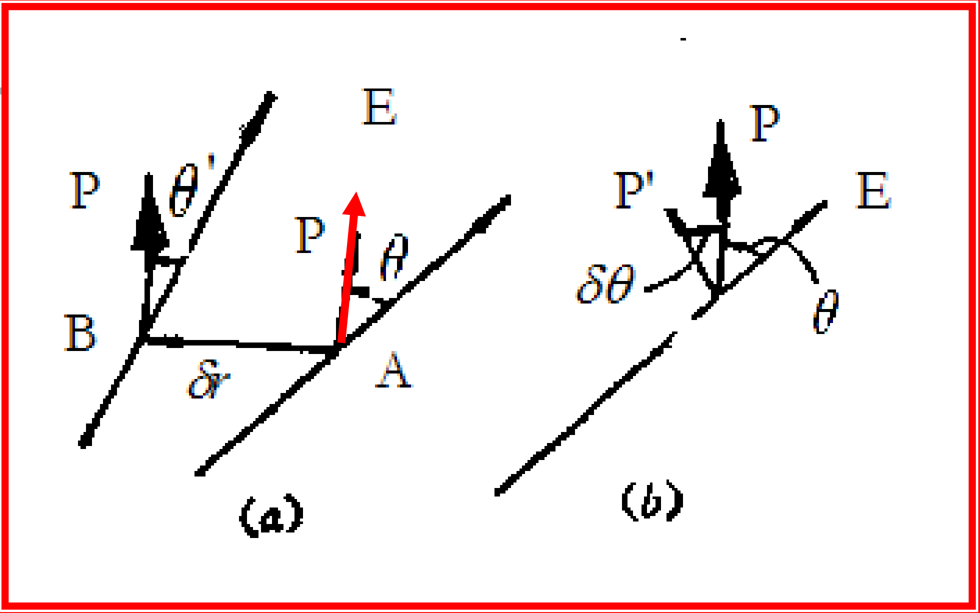
$m=dah\rho$, 因此

$$h=\frac{m}{da\rho}=\frac{F}{ad\rho g}=\frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)U^2}{2d^2\rho g}.$$



[例3.9]求在电场$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$中，电偶极子$\boldsymbol{p}$所受的力和力矩。
[解]式（3.3.6）给出了电偶极子在外场中的静电能：

$$W_{互}=-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}=-pE\cos\theta,$$



电偶极子在外电场中的平移和旋转

设 电偶极子作一平移，由A点移到B点（右图(a)）。由于是平移（即平行移动），$\boldsymbol{p}$的方向应保持不变。另外，电荷分布不变，即$\boldsymbol{p}$的大小也应保持不变。于是，静电力为：

$$\boldsymbol{F}=-(\nabla W_{互})_{\boldsymbol{p}}=[\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})]_{\boldsymbol{p}},$$

根据矢量微分公式：$[\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})]_p=(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}+\boldsymbol{p}\times\underbrace{(\nabla\times\boldsymbol{E})}_{0}$,

考虑到$\nabla\times E=0$，有 $\boxed{F=(\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}.}$ 与例**2-2**结果一致。

■在偶极子平移过程中，由于$\boldsymbol{E}$ 的方向随空间变化，θ也会发生相应变化，一般会有 $\theta'\neq\theta$ 。基于上述分析，**当直接计算时**，应将上式中的 $\boldsymbol{p}\bullet\boldsymbol{E}$ 代以$pE\cos\theta$,$\cos\theta$不能从梯度运算符号中提出，应为：

$$\mathbf{F}=[\nabla(pE\cos\theta)]_p=p(\cos\theta\nabla E-E\sin\theta\nabla\theta).$$

■下面求电偶极子所受的力矩。为此，设电偶极子作一角位移$\delta\theta$ ，如前页图*(b)*所示。此时$\boldsymbol{p}$的大小不变，但方向会发生变化。于是得：

$$L_\theta = -\left(\frac{\partial W_{互}}{\partial \theta}\right)_p = \frac{\partial}{\partial \theta}(pE\cos\theta) = -pE\sin\theta.$$

注意电偶极子的位置并未挪动，故$\boldsymbol{E}$被当作“常数”从微分号下提出。上式表明，在 L_θ 作用下，角 θ 减小，写成矢量形式有：

$$\boxed{\boldsymbol{L}_\theta = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}.}$$

此结果也与第二章的例2.2的结果一致。